ACTA
ACADEMIAE PAEDAGOGICAE AGRIENSIS
NOVA SERIES TOM. XX.

AZ ESZTERHÁZY KÁROLY TANÁRKÉPZŐ FŐISKOLA

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI

REDIGIT -- SZERKESZTI
VAJON IMRE, V. RAISZ RÓZSA

SECTIO MATEMATICAE

TANULMÁNYOK A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL

REDIGIT -- SZERKESZTI
KISS PÉTER

EGER
1991

HU ISSN 2039-1422

Felelős kiadó: Orbán Sándor
főiskolai főigazgató

Készült: az Eszterházy Károly Tanárképző Főiskola házi nyomdájában

PHAM VAN CHUNG

EGY KLASSZIKUS PROBLÉMA ÁLTALÁNOSITÁSA

ABSTRACT: *(A generalization of a classical problem) The congruence* $x^2 \equiv x \pmod{m^k}$ *was investigated by several authors, the first solution of it was given by M.Tédenat in 1814. In this paper we generalize this problem by solving the congruence* $x^2 \equiv ax \pmod{m^k}$*, where a, m, and k are given natural numbers. We give the number and the explicite form of the solutions and show some properties of them.*

1814-ben az "Annales de Math." c. folyóirat azt a problémát vetette fel, hogy "Melyek azok a természetes számok, amelyeknek négyzete ugyanarra a k-jegyű számra végződik, mint az eredeti szám?" Ezt M. Tédenant [6] oldotta meg először és igazolta, hogy két nem triviális megoldásának összege 10^k+1. Azóta ilyen, illetve hasonló problémával már többen foglalkoztak (lásd [2]). Ehhez a problémához lényegében az $x^2 \equiv x \pmod{10^k}$ kongruenciát kell megoldani.

A problémát a következőképpen általánosithatjuk: "Melyek azok a természetes számok az m alapu számrendszerben, amelyeknek négyzete ugyanakkora a k-jegyű számra végződik, mint az eredeti szám a-szorosa?" Azaz, keressük az

(1) $$x^2 \equiv ax \pmod{m^k}$$

kongruencia megoldásait.

A kongruencia speciális eseteivel sokan foglalkoztak. Különösen az $m = 10$ esetben értek el sok eredményt.

Érdemes megjegyezni, hogy az $x^2 \equiv x \pmod{m^k}$ megoldásait automorfikus számoknak is nevezték, és ezeket számitógép segitségével ki is számították különböző k értékek mellett. Vernon de Guerre és R.A. Fairbairn [7] -ben kiszámitották az 1000 jegyű automorfikus számokat $m = 6$; 10 és 12. esetben. Itt a szerkesztők megjegyzik, hogy I. Feigberg és T. Moore az 5-re végződő 22.300 jegyű automorfikus számokat is kiszámították.

1972-ben N.P.Callas [1] bizonyította, hogy ha

$x^2 \equiv x \pmod{10^n}$ és

$$y = x^t \sum_{k=0}^{t-1} (-1)^k \binom{t+k-1}{k} \binom{2t-1}{k} x^k ,$$

akkor

$$y^2 \equiv y \pmod{10^{tn}}$$

Általános m esetén az automorfikus számokkal Kiss Péter is foglalkozott, és megadta az automorfikus számok jegyeinek meghatározási módszerét (lásd [4]).

E dolgozatban az (1) kongruencia általános megoldásával foglalkozunk; megadjuk a megoldások számát és a megoldások explicit alakját, valamint a kongruencia numerikus megoldására egy rekurziós eljárást.

G. Vranceanu [8] felvetette azt a kérdést, hogy melyek azok az x természetes számok, amelyekre $x^2 - kx = a \cdot 10^n$, azaz mik az $x^2 \equiv kx \pmod{10^n}$ megoldásai rögzitett k és n mellett. Mi ezen probléma általánositásával foglalkozunk, ahol a,m,k pozitiv egészek. A megoldhatóság szükséges feltétele nyilván az, hogy $x^2 \equiv ax \pmod{m}$ megoldható legyen. Ezért először az utóbbi kongruenciával foglalkozunk.

Megmutatjuk, hogy elég az $(a,m) = 1$ esettel foglalkozni.

1. TÉTEL. Legyenek a és m rögzített pozitív egészek, $m>1$. Az

(2) $$x^2 \equiv ax \pmod{m}$$

kongruencia minden megoldása visszavezethető

(3) $$y^2 \equiv a_o y \pmod{m_o}$$

alakú kongurenciák megoldására, ahol $(a_o, m_o) = 1$, $a_o | a_1$ és $m_o | m$.

BIZONYÍTÁS: Legyen $(a,m) = d$ és tegyük fel, hogy x egy megoldása (2)-nek. Ekkor $a = da_1$, $m = dm_1$ és $(a_1,m_1) = 1$ és (2) alakja

$$x^2 \equiv da_1 x \pmod{dm_1},$$

amiből $d | x^2$. Ha $d | x$, akkor $x = dy$ és (2)-be helyettesitve a

$$d^2y^2 \equiv da_1 dy \pmod{dm_1}$$

adódik, amiből

$$y^2 \equiv a_1 y \pmod{m_o},$$

ahol $$m_o = \frac{m_1}{(d,m_1)},$$ és ez a kivánt (3) alak.

Ha $d \nmid x$, akkor d primosztóit x is tartalmazza:

$$d = \prod_{i=1}^{S} p_i^{e_i} \quad \text{és} \quad x = \prod_{1}^{S} p_i^{f_i} x' ,$$

ahol $e_i \leq 2 f_i$ $(i = 1,2,\ldots,S)$ de van olyan j, hogy $e_j > f_j$.

Legyen $$d_o = \prod_{1}^{S} p_i^{\left[\frac{e_i+1}{2}\right]}$$ és $x = d_o x'$, ahol $[x]$ az egész érték függvény. Ezek alapján $d_0^2 = d \prod_1^s P_i^{e_i}$, ahol $e_i=0$ vagy 1 aszerint, hogy e_i páros vagy páratlan. Legyen $d_0^2=dd'$. Igy $d'|d_0$ vagyis $d_0 = d'd_1$. Visszahelyettesítve ezeket (2)-be, azt kapjuk hogy

$$dd'x'^2 \equiv dd_0a_1x' \pmod{d\, m_2},$$

amiből

$$x'^2 \equiv d_1a_1x' \quad \left(\mathrm{mod}\ \frac{m_1}{(d',m_1)}\right).$$

Legyen $a_0 = d_1a_1$ és $m_0 = \dfrac{m_1}{(d',m_1)}$; $x' = y$. Ekkor $y^2 \equiv a_0y \pmod{m_0}$, ahol $a_0 < a$. Ha $(a_0, m_0) = 1$, akkor a (3) alakot kaptuk. Ha nem, akkor az előbb ismertetett eljárást folytatjuk és $a_0 < a$ miatt véges lépésben (3) alakra jutunk, ami tételünket bizonyitja.

Most meghatározzuk az

(4) $\qquad x^2 \equiv ax \pmod{m}; \quad (a,m) = 1$

kongruencia megoldásait.

2. TÉTEL. (4) kongruencia összes megoldása $x = uy_0$ illetve $x = vz_0$ alakú, ahol $(u,v) = 1$, $u\cdot v = m$, és az y_0, z_0 számpár megoldása az $uy+vz = a$ egyenletnek.

BIZONYÍTÁS: Be kell látnunk, hogy minden megoldás a kivánt alaku és viszont.

Tegyük fel először, hogy (4) megoldott és legyen x egy megoldása, azaz $x^2 \equiv ax \pmod{m}$; legyen $(x,m) = u$. Ennélfogva vannak y_0 és v egészek, amelyre

$$x = uy_0 \quad \text{és} \quad m = u\cdot v\ :\ (y_0,v) = 1$$

Ezeket (4)-be helyettesítve

$$\left[uy_0\right]^2 \equiv auy_0 \pmod{uv}$$

kongruenciához jutunk, amiből $uy_0^2 \equiv ay_0 \pmod{v}$ és $(y_0, v) = 1$ miatt:

$$uy_0 \equiv a \pmod{v}.$$

Innen $(u,v) = 1$, mert másként $(a,m) \neq 1$ lenne, ami lehetetlen a feltétel szerint. Ebből következik, hogy van olyan z egész szám, melyre

$$uy_0 + vz_0 = a,$$

ami bizonyítja a tétel egyik állítását.

Még azt kell igazolni, hogy ha u,v,y_0,z_0 olyan egészek, melyekre $uv = m$, $(u,v) = 1$ és

$$uy_0 + vz_0 = a,$$

akkor $x = uy_0$ és $x = vz_0$ megoldásai (4)-nek. Ez pedig igaz, mert a feltételek miatt az egyenletből például $x = uy_0$ mellett

$$\begin{aligned} x^2 &= (a-vz_0)^2 = a(a-vz_0)-vz_0(a-vz_0) = \\ &= auy_0-uvy_0z_0 = ax-my_0z_0 \equiv ax \pmod{m} \end{aligned}$$

következik.

MEGJEGYZÉSEK: Az előbbi tétel felhasználásával a (4) kongruenciát a következőképpen oldhatjuk meg:

1. Bontsuk fel az m modulust két relativ prim tényező szorzatára, azaz $m = u \cdot v$; $(u,v) = 1$.

2. Oldjuk meg az $uy+vy = a$ egyenletet. Elegendő csak egy (x_0, y_0) megoldást keresni.

3. A (4) kongruencia két megoldása $x \equiv uy_0$ illetve $vy_0 \pmod{m}$.

4. Megkapjuk (4) összes megoldását, ha az előző eljárást megismételjük minden $m = u \cdot v$, $(u,v) = 1$ felbontásnál.

Meg tudjuk adni a megoldások explicit alakját is.

C.P. Popovici [5] bizonyította, hogy $x^2 \equiv x \pmod{10^n}$ kongruencia megoldásai $x_1 \equiv 2^{4\cdot 5^{n-1}}$, $x_2 \equiv 5^{2^{n-1}} \pmod{10^n}$. Azonkívül Goodstein [3]-ben igazolta, hogy ha $m = u\cdot v, (u,v)=1$ és q olyan pozitív egész szám, hogy $u^q \equiv 1 \pmod v$, akkor $x \equiv u^{qv^{k-1}} \pmod{m^k}$ megoldása az $x^2 \equiv x \pmod{m^k}$ kongruenciának.

A mi esetünkben hasonló tétel igazolható.

3. TÉTEL. Legyen $(a,m) = 1$. Ekkor

(5) $$x^2 \equiv ax \pmod m$$

kongruencia minden megoldása:

$$x \equiv au^{\varphi(v)} \pmod m$$

alakú, ahol $u\cdot v = m$, $(u,v) = 1$ és φ az Euler-függvény.

BIZONYÍTÁS: A 2. Tétel alapján (5) megoldásai $x = uy$ alakuak, ahol $m = uv$, $(u,v) = 1$ és

$$uy \equiv a \pmod v.$$

De akkor

$$y = a\cdot u^{\varphi(v)-1} \pmod v$$

és így

$$x \equiv uy \equiv a\cdot u^{\varphi(v)} \text{ mod } v).$$

Szintén a 2. Tételből következik, hogy minden $\left(u,\frac{m}{v}\right) = 1$ feltételt kielégítő u-hoz mod m egyetlen x megoldása tartozik az (5) kongruenciának, továbbá különböző u értékekhez inkongruens x-ek tartoznak mod m.

Ezek alapján állapítsuk meg a megoldások számát. Tegyük fel, hogy az m modulusnak r különböző prímtényezője van, azaz $m = P_1^{\alpha_1} \ldots P_r^{\alpha_r}$. Mint láttuk, minden $m = u\cdot v$; $(u,v)= 1$ felbontáshoz pontosan 1 megoldás tartozik. Innen következik, hogy (5) -nek annyi különböző megoldása van, ahányféleképpen m felbontható két relativ prim tényező szorzatára; a tényezők sorrendjét is figyelembe véve. A felbontás a következőképpen történhet: u az m-nek r primtényezője közül tartalmazhat 0,1,2,...,r -et, amig v rendre: r, r-1, ..., 2, 1, 0 -át. Ezért a megoldások száma

$$\binom{r}{0} + \binom{r}{1} + \dots + \binom{r}{r} = 2^r.$$

Ezzel bizonyítottuk a következő tételt:

4. TÉTEL. Ha $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ az m szám kanonikus előállitása, akkor az $x^2 \equiv ax \pmod{m}$ kongruenciának 2^r inkongruens megoldása van, feltéve, hogy $(a,m) = 1$.

Most vizsgáljuk azt az esetet, amikor a modulus m-nek k-adik hatványa, vagyis

(6) $$x^2 \equiv ax \pmod{m^k},$$

ahol $(a,m) = 1$. Mivel m^k-ra ugyanazok a feltételek teljesülnek mind m-re és primtényezők száma is megegyezik, ezért a 2. és 3. Tétel segitségével (6) is megoldható és az inkongruens megoldások száma a 4. Tétel miatt itt is 2^r.

Megkönnyiti azonban (6) numerikus megoldását a következő tétel, ami lényegében a 3. Tétel átfogalmazása.

5. TÉTEL. Ha $(a,m) = 1$, $m = u \cdot v$; $(u,v) = 1$ és

$$y_k \equiv u^{\varphi(v) \cdot v^{k-1}} \pmod{m^k},$$

akkor $x_k \equiv ay_k \pmod{m^k}$ megoldása az (6) kongruenciának.

Lássunk egy példát az 5. Tételre. Legyen például $m = 10$ és $a = 1$, vagyis keressük az $x^2 \equiv x \pmod{10^k}$ kongruencia megoldásait, azaz azokat a k jegyű pozitiv egész számokat, melyek négyzetének utolsó k helyen álló számjegyei megegyeznek az eredeti számmal. Például u=5, v=2 esetén

$k=1,2,3,4,5$ értékekhez tartozó megoldások 5,25,625,0625,90625. Könnyen belátható, hogy ha x_k egy k jegyű megoldás, akkor x_{k+1} az x_k^2 alsó $k+1$ jegyéből képezett $k+1$ jegyű szám.

A következőkben a kongruencia megoldásainak összegét vizsgáljuk. Bevezetjük az "alapmegoldás" fogalmát.

Egy kongruencia azon megoldásait, amelyek pozitivak és a modulusnál nem nagyobb számok, alapmegoldásnak nevezzük. Például $x^2 \equiv ax \pmod{m}$ ilyen megoldásai $x=a$ és $x=m$, ahol $0 < a < m$.

Ezután bebizonyitjuk a következő tételt, amely megkönnyiti a kongruenciáink numerikus megoldását.

6. TÉTEL. Ha x_1 az $x^2 \equiv ax \pmod{m^k}$ kongruencia egy megoldása, akkor $x_2 = m^k+a-x_1$ is megoldás.

BIZONYÍTÁS: Valóban, ha $x_1^2 \equiv ax_1 \pmod{m^k}$, akkor

$$x_2^2 = \left(m^k+a-x_1\right)^2 \equiv \left(a-x_1\right)^2 = a(a-x_1)+x_1^2-ax_1 \equiv$$
$$\equiv a\left(m^k+a-x_1\right) = ax_2 \pmod{m^k}$$

ami a tételt bizonyitja.

Megjegyezzük, hogy e tétel speciális esetét már többen bizonyitották $a=1$ és $m=10$ esetében először M. Tedénat [6].

A 6. Tételben szereplő megoldáspárok a következő tulajdonságokkal rendelkeznek az $(a,m) = 1$ esetben.

a/ x_1, x_2 legnagyobb közös osztója relativ prim a modulushoz. Ez abból következik, hogy $\left(x_1,x_2\right)=\left(x_1, m^k+a-x_1\right)=$ $= \left(x_1,m^k+a\right)$ és $(m,a) = 1$, ezért $\left(\left(x_1, x_2\right), m\right) = \underline{1}$.

b/ $x_1 \cdot x_2 \equiv 0 \pmod{m^k}$. Ez pedig abból következik, hogy

$$x_1 \cdot x_2 = x_1\left(-x_1+m^k+a\right) \equiv ax_1-x_1^2 \equiv 0 \pmod{m^k}.$$

Ezen tulajdonságok egy bizonyos megfordítását mutatja a következő tétel.

7. TÉTEL. Legyen x_1, x_2 két megoldása az

$$x^2 \equiv ax \pmod{m^k}, \qquad (m^k, a) = 1$$

kongruenciának. Ha $\left(\left(x_1, x_2\right), m^k\right) = 1$ és $x_1 \cdot x_2 \equiv 0 \pmod{m^k}$ akkor x_1+x_2 is megoldás és

$$x_1 + x_2 \equiv a \pmod{m^k}$$

BIZONYÍTÁS:

$$\left(x_1+x_2\right)^2 = x_1^2+x_2^2+2x_1x_2$$

és a feltételek miatt

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &\equiv 0 \pmod{m^k}, \\ x_1^2 &\equiv ax_1 \pmod{m^k}, \\ x_2^2 &\equiv ax_2 \pmod{m^k}, \end{aligned}$$

ezért

$$\left(x_1+x_2\right)^2 \equiv a(x_1+x_2) \pmod{m^k}.$$ Tehát x_1+x_2 is megoldás.

De $\left(\left(x_1, x_2\right), m^k\right) = 1$ és $x_1x_2 \equiv 0 \pmod{m^k}$ miatt

$$\left(x_1+x_2\right)\left(x_1+x_2-a\right) \equiv 0 \pmod{m^k}$$

kongruenciából

$$x_1+x_2-a \equiv 0 \pmod{m^k}$$

következik, amiből már adódik a tétel hiányzó állitása.

Az előzőek alapján, mivel a kongruenciánk megoldásai párokba rendezhetők, az inkongruens megoldások összegére könnyen bizonyítható:

8. TÉTEL. Legyen $(a,m) = 1$ és jelöljük S_k -val az

$$x^2 \equiv ax \pmod{m^k}$$

kongruencia inkongruens megoldásainak összegét. Ekkor

$$S_k \equiv a \cdot 2^{r-1} \pmod{m^k},$$

ahol r az m különböző prímtényezőinek száma.

BIZONYÍTÁS: A 3. Tétel alapján ha $x_1 \equiv a \cdot u^{\varphi(v)} \pmod{m^k}$ egy megoldás, akkor $x_2 = av^{\varphi(u)}$ is megoldás, ahol $m^k = u \cdot v$; $(u,v) = 1$. De $\left(x_1, x_2\right) = a$ és $(a,m) = 1$. Igy $\left(\left(x_1, x_2\right), m^k\right) = 1$ és $x_1 \cdot x_2 \equiv 0 \pmod{m}$. Ezért a 7. Tétel alapján $x_1 + x_2 \equiv a \pmod{m^k}$. De a 4. Tétel miatt 2^{r-1} ilyen megoldáspár van, ezért a megoldásokra

$$\sum x_i \equiv \sum_{1}^{2^{r-1}} a = 2^{k-1} a \pmod{m^k}.$$

Például: $x^2 \equiv x \pmod{210}$ megoldásainak összege:

$$\sum x_i \equiv 2^{4-1} = 8 \pmod{210}$$

mert $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ miatt $r = 4$.

És valóban, számitógép segitségével a következő megoldások adódtak:

$x_1 = 1$	$x_5 = 70$	$x_9 = 106$	$x_{13} = 175$
$x_2 = 15$	$x_6 = 85$	$x_{10} = 120$	$x_{14} = 190$
$x_3 = 21$	$x_7 = 91$	$x_{11} = 126$	$x_{15} = 196$
$x_4 = 36$	$x_8 = 105$	$x_{12} = 144$	$x_{16} = 210$

Ezek összege $\sum x_i = 1688 \equiv 8 \pmod{210}$.

IRODALOM

[1] N.P. Callas, Representations of automorphic numbers, Fibonacci Quart., 10 (1972), 393-396, 402.

[2] L.E. Dickson, History of the theory of numbers, Vol. I, New York, 1952.

[3] R.L. Goodstein, Automorphic number in a general scale, Math. Gaz., 43 (1959), 270-272.

[4] P. Kiss, On one way of making authomorphic numbers, Publ. Math. Debrecen, 22 (1975), 199-203.

[5] C.P. Popovici, Sur une équation arithmétique de D. Pompeiu, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. R., 9 (1967), 91-97.

[6] M. Tédenat, Solutions du probléme d' arithmétique, Ann. Math., 5 (1814-15), 309-321.

[7] Vernon de Guerre and R. A. Fairbairn, Automorphic numbers, Journal of Recr. Math., 1 (1968), 173-179.

[8] G. Vranceanu, Asupra unei ecuatii aritmetica, Com. Acad. Rep. Pop. Romane, 3 (1953), 5-8.

KISS PÉTER*

A LUCAS SZÁMOK PRIMOSZTÓINAK EGY TULAJDONSÁGÁRÓL

ABSTRACT: *(On a property of the prime divisors of Lucas numbers)Let* (R_n) *be a sequence of Lucas numbers defined by* $R_0=0$, $R_1=1$ *and* $R_n=AR_{n-1}+BR_{n-2}$ $(n>1)$, *where A, B are fixed coprime non-zero integers. For a prime p* $(p\nmid B)$ $r(p)>0$ *denotes the rank of apparition of p in the sequence, i.e.* $p|R_{r(p)}$ *but* $p\nmid R_m$ *for* $0<m<r(p)$. *We prove that the mean values of the numbers* $p/r(p)$ *and* $r(p)/p$, *for which* $r(p)\le x$, *are greater than* $\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\cdot\log x$ *and less than* $(1+\varepsilon)(\log\log x)/\log x$, *respectively, for any* $\varepsilon>0$ *if x is sufficiently large.*

Legyen $R=(R_n)$, $n=0,1,2,\dots$, a Lucas számok egy sorozata, melyet az A,B zérustól különböző rögzített egészek, az

$$R_n = A\cdot R_{n-1} + B\cdot R_{n-2} \qquad (n>1)$$

rekurzió és az $R_0=0$, $R_1=1$ kezdő elemek definiálnak. A továbbiakban feltesszük, hogy az R sorozat nem degenerált, vagyis $(A,B)=1$ és a sorozatnak nincs R_0-tól különböző zérus eleme.

Ismert, hogy ha p egy prímszám és $p\nmid B$, akkor van az R sorozatban R_0-tól különböző p-vel osztható tag. Ha $n>0$ és $p|R_n$, de $p\nmid R_m$ az $m=1,2,\dots,n-1$ indexekre, akkor az n indexet a p prím előfordulási rendjének nevezzük az R sorozatban és $r(p)$-vel jelöljük. Tehát ha $p\nmid B$, akkor $r(p)$ létezik és

---

* A kutatást (részben) az Országos Tudományos Kutatási Alap 273 sz. pályázata támogatta.

$p|R_{r(p)}$, de $p\nmid R_i$, $i=1,2,\dots,r(p)-1$. Az is jól ismert, hogy nincs a sorozatban p-vel osztható tag, ha $p|B$ és $(A,B)=1$ (ilyenkor $r(p)=\infty$ megállapodással élünk), továbbá $p\nmid B$ esetén

$$r(p)|(p - (D/p)) ,$$

ahol $D=A^2+4B$ és (D/p) a Legendre szimbolum $(D/p)=0$ a $p|D$ esetben kiterjesztéssel (lásd pl. D.H. Lehmer [4]).

Az előzőekből következik, hogy $r(p) \le p-(D/p) \le p+1$, ezért nyilván $r(p)/p \le 1+\frac{1}{2} < 2$ minden $p\nmid B$ primszám esetén. De [1] és [2] eredményeiből következik, hogy $r(p)/p$ tetszőlegesen kicsi is lehet. [3] -ban $r(p)/p$ átlagértékeire a következőket kaptuk: léteznek c_1, c_2, c_3, c_4 pozitiv abszolut konstansok ugy, hogy

$$(1) \qquad c_1 \cdot \frac{\sqrt{x}}{\log x} < \sum_{p\le x} \frac{r(p)}{p} < c_2 \cdot \frac{x}{\log x}$$

és

$$(2) \qquad c_3 \cdot \frac{\sqrt{x}}{\log x} < \sum_{r(p)\le x} \frac{r(p)}{p} < c_4 \cdot x$$

minden elég nagy x-re. Mivel az x-nél nem nagyobb primek száma aszimptotikusan $x/\log x$ és, mint ahogy majd látni fogjuk, az $r(p) \le x$ feltételt kielégítő primek száma legalább $(1-\varepsilon)x$ bármely $\varepsilon>0$ esetén, ha x elég nagy, ezért (1) és (2) jobboldalából csak az következik, hogy $r(p)/p$ átlagértéke kisebb mint egy konstans. A következőkben jobb becslést adunk $r(p)/p$ és $p/r(p)$ átlagértékeire. A következőt bizonyitjuk:

TÉTEL. Legyen x egy pozitiv valós szám és $\omega(x)$ azon primek száma, melyekre $r(p) \le x$. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$(3) \qquad \frac{1}{\omega(x)} \cdot \sum_{r(p)\le x} \frac{p}{r(p)} > \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \cdot \log x$$

és

$$(4)\qquad \frac{1}{\omega(x)} \cdot \sum_{r(p)\leq x} \frac{r(p)}{p} < \left(1 + \varepsilon\right) \cdot \frac{\log \log x}{\log x}$$

ha $x>x(\varepsilon)$.

A tételünk alapján következtethetünk a Lucas számok primitiv primosztóinak nagyságára is. Egy R Lucas szám primitiv primosztójának nevezzük a p primszámot, ha $r(p)=n$. A tételünkből következik, hogy általában $p > r(p) \cdot \log x$, vagyis R_n primitiv primosztóira általában $p > n \cdot \log n$. A Lucas számok legnagyobb primitiv primosztóira C.L. Stewart [6] hasonló eredményt ért el, miszerint majdnem minden n természetes szám esetén R_n legnagyobb primitiv primosztója nagyobb mint $\varepsilon(n) \cdot n \cdot (\log n)^2 / \log \log n$, ahol $\varepsilon(n)$ egy tetszőleges, $\varepsilon(n) \longrightarrow 0$, ha $n \longrightarrow \infty$ feltételt kielégitő függvény. Stewart eredménye csak a legnagyobb primitiv primosztóra, a mi eredményünk pedig minden primitiv primosztóra vonatkozik.

Megemlitjük, hogy a (3) egyenlőtlenség egy gyengébb formáját Révész Máriusz [5] is bizonyította, ő az $\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)$ helyett egy konstans létezését bizonyította.

Rátérünk a tételünk bizonyítására.

A TÉTEL BIZONYÍTÁSA: A továbbiakban feltesszük, hogy x egész szám, továbbá ε_1, ε_2, ... -vel pozitiv valós számokat jelölünk, melyek tetszőlegesen kicsik lehetnek, ha x elég nagy.

C.L. Stewart [7] bizonyította, hogy van olyan n_0 pozitiv egész szám ugy, hogy minden $n > n_0$ esetén az R_n Lucas számnak van primitiv primosztója, vagyis minden n_0 -nál nagyobb n egészhez van olyan p prim, melyre $r(p)=n$. Ebből következik, hogy

$$(5)\qquad \omega(x) \geq x - n_0 > (1 - \varepsilon_1)x.$$

Legyen $p_1, p_2, \dots$ a primszámok növekvő sorozata. Ekkor $\omega(x)$ definiciója alapján

$$(6) \qquad \sum_{r(p)\le x} \frac{p}{r(p)} > \frac{1}{x} \cdot \sum_{r(p)\le x} p \ge \frac{1}{x} \cdot \sum_{i=1}^{\omega(x)} p_i \, .$$

Ismert, hogy

$$p_n > n \cdot \log n$$

minden $n \ge 1$ esetén és ha $y > 3$ tetszőleges valós szám, akkor

$$\sum_{p\le y} p = \frac{y^2}{2\cdot \log y} + O\left(\frac{y^2}{\log^2 y}\right) ,$$

ezért $n=\omega(x)$ és $y=\omega(x)\cdot \log \omega(x)$ helyettesítéssel

$$\sum_{i=1}^{\omega(x)} p_i \ge \sum_{p\le y} p \ge (1-\varepsilon_2) \cdot \frac{y^2}{2\cdot \log y} \ge$$

$$\ge \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_3\right)\cdot(\omega(x))^2\cdot \log \omega(x)$$

következik. Ebből viszont (5) és (6) alapján

$$\sum_{r(p)\le x} \frac{p}{r(p)} > \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_3\right)\cdot \frac{\omega(x)\cdot \log \omega(x)}{x} \cdot \omega(x) >$$

$$> \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_4\right)(\log x)\cdot \omega(x)$$

adódik, amiből (3) már következik.

Most rátérünk (4) bizonyítására.

Mivel $r(p) \le p+1$ a $p \nmid B$ feltételt kielégítő primekre és

$$(7) \qquad \sum_{p\le y} \frac{1}{p} = \log \log y + C + O\left(\frac{1}{\log^2 y}\right) ,$$

ahol C egy abszolut konstans, ezért (5) figyelembe vételével

$$(8) \qquad \sum_{\substack{r(p)\le x \\ p\le \omega(x)}} \frac{r(p)}{p} \le \Pi(\omega(x)) + \sum_{p\le\omega(x)} \frac{1}{p} <$$

$$< \left(1+\varepsilon_6\right)\cdot \frac{\omega(x)}{\log\omega(x)} ,$$

ahol $\Pi(\omega(x))$ az $\omega(x)$ -nél nem nagyobb primszámok számát jelöli. Másrészt $p_n\le(1+\varepsilon_6)n\cdot\log n$ tetszőleges $\varepsilon_6>0$ esetén, ha $n>n(\varepsilon_6)$, ezért

$$(9) \qquad \sum_{\substack{r(p)\le x \\ p>\omega(x)}} \frac{r(p)}{p} \le x \cdot \sum_{\substack{r(p)\le x \\ p>\omega(x)}} \frac{1}{p} \le x \cdot \sum{}' \frac{1}{p}$$

adódik, ahol $\sum{}' \frac{1}{p}$ azon p primek reciprokösszegét jelenti, melyekre

$$\omega(x) < p \le (1+\varepsilon_6)\cdot\omega(x)\cdot\log\omega(x) .$$

Igy (7) alapján

$$\sum{}' \frac{1}{p} \le \log\log\left[(1+\varepsilon_6)\cdot\omega(x)\cdot\log\omega(x)\right] - \log\log\omega(x) +$$

$$+ O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right) .$$

De ha y elég nagy valós szám, akkor

$$\log\log(y\cdot\log y) = \log\left(\log y\left(1+\frac{\log\log y}{\log y}\right)\right) <$$

$$< \log\log y + (1+\varepsilon_7)\cdot\frac{\log\log y}{\log y} ,$$

ezért

$$(10) \qquad \sum{}' \frac{1}{p} < (1+\varepsilon_8)\cdot\frac{\log\log\omega(x)}{\log\omega(x)}$$

és (8), (9), (10) alapján

$$\sum_{r(p)\le x} \frac{r(p)}{p} < \left(1+\varepsilon_9\right)\cdot\left(\frac{\omega(x)}{\log\omega(x)} + \frac{x\cdot\log\log\omega(x)}{\log\omega(x)}\right)$$

következik. Azonban az

$$f(t) = \frac{\log \log t}{\log t}$$

függvény csökkenő, ha $t > e^{e}$, ezért (5) és $\frac{x}{\omega(x)} < (1+\varepsilon_{10})$ alapján a

$$\sum_{r(p) \le x} \frac{r(p)}{p} < \left(1 + \varepsilon_{11}\right) \cdot \omega(x) \cdot \left(\frac{1}{\log x} + \frac{\log \log x}{\log x}\right)$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amiből (4) már következik.

IRODALOM

[1] P. Kiss and B.M. Phong, On a function concerning second order recurrences, Ann. Univ.Sci. Budapest. Eötvös, 21 (1978), 119-122.

[2] Kiss Péter, A Lucas számok primosztóiról, Acta Acad. Pedag. Agriensis, XVIII/11 (1987), 17-25.

[3] P. Kiss, On rank of apparition of primes in Lucas sequences, Publ. Math. Debrecen, 36 (1989), 147-151.

[4] D.H. Lehmer, An extended theory of Lucas' function, Ann. of Math., 31 (1930), 419-448.

[5] Révész Máriusz, Primszámok előfordulási rendje Lucas sorozatokban, Diákköri Dolgozat, Tanárképző Főiskola, Eger, 1988.

[6] C.L. Stewart, On the greatest prime factor of terms of a linear recurrence sequence, Rocky Mountain J. of Math., 15 (1985), 599-608.

[7] C.L. Stewart, Primitive divisors of Lucas and Lehmer numbers, Transcendence theory: advances and applications, ed. by A. Baker and D.W. Masser, Acad. Press, London and New York, (1977), 79-92.

ZAY BÉLA

NEMLINEÁRIS REKURZIÓVAL DEFINIÁLT SOROZATOKRÓL

ABSTRACT: *(On sequences defined by nonlinear recursion) In the paper we investigate a nonlinear recursive sequence defined by* $G_n = \sum_{i=1}^{p} A_i \cdot G_{n-i} + D_n$ $(n>p)$, *where* p *is fixed positive integer,* A_i*'s are given, real numbers and* D_n *is a sequence of real numbers. We show that* G_n *satisfies a linear recursion of order greater than* p *if* D_n *is a constant, or* D_n *is the sequence of the values of a polynomial, or* D_n *is a linear recursive sequence. The characteristic polynomial and some other properties of the sequence* G_n *are also determined.*

Legyen p egy rögzített pozitiv egész szám, és legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_p$ rögzített valós számok. Definiáljuk a valós számok egy $G = \left\{G_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatát a

$$G_n = A_1 \cdot G_{n-1} + A_2 \cdot G_{n-2} + \ldots + A_p \cdot G_{n-p} + D_n \qquad (n>p) \tag{1}$$

rekurzióval, ahol a $G_1, G_2, \ldots, G_p$ kezdő eleme adott, nem mind zérus valós számok, és $D = \left\{D_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ a valós számok valamely sorozata.

Hasonló, nemlineáris sorozatokkal már többen foglalkoztak. P.R.J. Asveld [1], [2] olyan (1)-et kielégítő rekurziv sorozatokkal foglalkozott, melyben $p=2$, $A_1=A_2=1$ és D egy polinom helyettesítési értékeinek sorozata. (1)-ben bizonyította, hogy a sorozat tagjaira

$$G_n = q_1 \cdot F_n + q_2 \cdot F_{n-1} - h(n),$$

ahol F_i az i-edik Fibonacci szám, q_1, q_2 rögzített valós számok, $h(x)$ pedig egy rögzített polinom.

M. Bicknell-Johnson és G.E. Bergum [3] Asveld által vizsgált sorozathoz hasonló sorozattal foglalkoztak, de náluk D egy konstans sorozat.

A következőkben a fentieknek egy közös általánosítását vizsgáljuk, és egyben javítjuk az előbb emlitett eredményeket. Megmutatjuk, hogy az (1)-ben definiált sorozat lineáris rekurziv sorozat, ha D egy konstans, polinom, vagy egy lineáris rekurziv sorozat.

A továbbiakban szükségünk lesz a lineáris rekurziv sorozatokkal kapcsolatban néhány fogalomra. Legyen $R = \left\{R_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ egy k-adrendű lineáris rekurziv sorozat, melyet az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ konstansok, $R_1, R_2, \ldots, R_k$ kezdő elemek és az

$$R_n = A_1 \cdot R_{n-1} + A_2 \cdot R_{n-2} + \ldots + A_k \cdot R_{n-k} + D_n \qquad (n>k)$$

lineáris rekurzió definiál. Az R sorozat karakterisztikus polinomjának nevezzük az

$$f_R(x) = x^k - A_1 \cdot x^{k-1} - A_2 \cdot x^{k-2} - \ldots - A_k$$

polinomot. Legyenek $f_R(x)$ különböző zérushelyei $x_1, x_2, \ldots, x_t$, melyek multiplicitásai $k_1, k_2, \ldots, k_t$. Ismert, hogy ekkor az R tagjai

$$(2) \qquad R_n = p_1(n) \cdot x_1^n + p_2(n) \cdot x_2^n + \ldots + p_t(n) \cdot x_t^n$$

alakban is felirhatók minden $n \geq 1$ esetén, ahol $p_i(x)$ egy $k_i - 1$ -ed foku polinom (Lásd Pl. M.D'Ocagne [4]).

A következő tételeket fogjuk bizonyitani:

1. TÉTEL. Legyen G az (1)-ben megadott sorozat, és legyen Y egy p-ed rendű lineáris rekurziv sorozat, melyet szintén az $A_1, A_2, \dots, A_p$ konstansok, és az $Y_1=G_1$, $Y_2=G_2$, ... , $Y_p=G_p$ kezdőelemek és az

$$Y_n = A_1 \cdot Y_{n-1} + A_2 \cdot Y_{n-2} + \dots + A_p \cdot Y_{n-p} \qquad (n>p)$$

lineáris rekurzió definiál. Jelöljük $y_1, y_2, \dots$ -vel az Y sorozat elemeit, ha $Y_1=Y_2= \dots =Y_{p-1}=0$ és $Y_p=1$.
Ekkor

$$(3) \qquad G_n = Y_n + \sum_{i=p+1}^{n} y_{n+p-i} \cdot D_i$$

minden $n>p$ esetén.

2. TÉTEL. Ha D egy r-ed rendű lineáris rekurziv sorozat, akkor a G elemei előállíthatók az $f_G(x) = f_Y(x) \cdot f_D(x)$ karakterisztikus polinommal meghatározott $p+r$ -ed rendű lineáris rekurzióval, a $G_1, \dots, G_{p+r}$ kezdőelemekből.

A 2. Tétel bizonyításából adódik a következő eredmény:

KÖVETKEZMÉNY: Ha valamely $p+r$ -ed rendű G lineáris rekurziv sorozat karakterisztikus polinomja $f_G(x) = = f_1(x) \cdot f_2(x)$ alakú, ahol az $f_1(x)$ egy p-ed fokú, $f_2(x)$ pedig r-ed fokú valós együtthatós főpolinom, akkor G elemeire teljesül a

$$G_n = \sum_{i=1}^{p} A_i \cdot G_{n-i} + D_n \ , \text{ ha } \ n>p+r$$

rekurzió is, ahol az A_i együtthatókat $(1 \le i \le p)$ az

$f_1(x) = x^p - \sum_{i=1}^{p} A_i \cdot x^{p-i}$ egyenlőségből állapíthatjuk meg, a D pedig egy $f_D(x) = f_2(x)$ karakterisztikus polinommal rendelkező r-ed rendű lineáris rekurziv sorozat, melynek $D_{p+1}, \dots, D_{p+r}$ kezdőértékeit a

$$D_n = G_n - \sum_{i=1}^{p} A_i \cdot G_{n-i}, \quad \text{ha } p+1 \leq n \leq p+r$$

képlet szerint számíthatjuk.

Ha

$$D_n = \sum_{i=0}^{r-1} a_i \cdot n^i,$$

akkor (2) miatt D egy r-ed rendű lineáris rekurziv sorozat $f_D(x) = (x-1)^r$, karakterisztikus polinommal, így az (1)-ben definiált G sorozat, a 2. Tétel szerint p+r -ed rendű lineáris rekurziv sorozat, ahol

$$f_G(x) = \left[x^p - \sum_{i=1}^{p} A_i x^{p-i}\right] \cdot (x-1)^r,$$

így a $G_1, \ldots, G_{p+r}$ kezdőértékek ismeretében egy p+r ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldásával a G explicit alakja meghatározható. Erre a [2] -ben láthatunk egy "standard" eljárást a $p=2$, $A_1=A_2=G_1=G_2=1$ speciális esetben. A leirtak alapján könnyen átgondolható, hogy ez a módszer az általános esetben is követhető.

Megjegyezzük, hogy speciálisan az

(4) $\qquad r=1,\ p=2,\ A_1=A_2=1$

feltételek mellett M. Bicknell-Johnson és G.E. Bergum foglalkozott a G sorozattal [3] -ban. A továbbiakban az $r=1$, azaz $D_n=a_0$ ha $n>p$ feltétel melletti G sorozattal foglalkozunk, esetleg utalva arra, hogy speciálisan a (4) feltétel mellett hogyan adódik a [3]-beli eredmények némelyike.

Ismert, és a lineáris rekurziv sorozat explicit alakja segítségével könnyen igazolható állítás az, hogy ha a G lineáris rekurziv sorozat $f_G(x)$ karakterisztikus polinomjának x_1 egyszeres gyöke, és $|x_1| > |x_i|$ $i=2,\ldots,t$ ahol t az $f_G(x)$ különböző gyökeinek a száma, akkor

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{G_{n+1}}{G_n} = x_1$. Innen a (4) feltétel mellett adódik a [3] -beli eredmény: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{G_{n+1}}{G_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Szintén a [3] -ban szerepel a (4) feltételt kielégítő G sorozatra a $G_n = G_1 \cdot F_{n-2} + G_2 \cdot F_{n-1} + a_0 \cdot (F_n - 1)$ képlet, ahol

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n - \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n \right),$$

azaz a Fibonacci sorozat n-edik eleme. A következő tétel ennek egy általánosítása.

3. TÉTEL. Definiáljunk egy G sorozatot a $G_1, G_2, \ldots, G_p$ kezdőelemekkel, $A_1, A_2, \ldots, A_p$, a_0 konstansokkal és a

$$G_n = \sum_{i=1}^{p} A_i \cdot G_{n-i} + a_0 \qquad (n>p)$$

rekurzióval. Legyenek továbbá $\{Y_{n,i}\}_{n=1}^{\infty}$ $(i=1,2,\ldots,p)$ p-ed rendű lineáris rekurzív sorozatok, melyeket az $A_1, A_2, \ldots, A_p$ konstansokkal és

$$Y_{n,i} = \begin{cases} 0 \text{ ha } n \neq i \text{ és } 1 \leq n \leq p \\ 1 \text{ ha } n = i \text{ és } 1 \leq n \leq p \end{cases}$$

feltételt kielégítő kezdő elemekkel definiálunk.

Ekkor, ha

$$S_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} y_i ,$$

ahol y az 1. Tételben definiált sorozat, akkor

$$G_n = \sum_{i=1}^{p} G_i \cdot Y_{n,i} + a_0 \cdot S_{n-1}$$

teljesül minden $n>p$ esetén.

Rátérünk a tételek bizonyítására.

AZ 1. TÉTEL BIZONYÍTÁSA: A tétel feltételei és a sorozatok definiciói alapján

$$G_{p+1} = \sum_{i=1}^{p} A_i \cdot G_{p+1-i} + D_{p+1} = \sum_{i=1}^{p} A_i \cdot Y_{p+1-i} + D_{p+1} =$$

$$= Y_{p+1} + y_p \cdot D_{p+1} = Y_{p+1} + \sum_{i=p+1}^{p+1} y_{p+1+p-i} \cdot D_i$$

Tegyük fel a továbbiakban, hogy minden j-re (p<j<n) teljesül a (3). Ezt és a sorozatok definicióit felhasználva (különösen figyelve az y sorozat kezdőértékeire) a p+1≤ n<2p esetben

$$G_n = \sum_{t=1}^{n-p-1} A_t \cdot G_{n-t} + \sum_{t=n-p}^{p} A_t \cdot G_{n-t} + D_n =$$

$$= \sum_{t=1}^{n-p-1} A_t \cdot \left[Y_{n-t} + \sum_{i=p+1}^{n-t} y_{n-t+p-i} \cdot D_i \right] + \sum_{t=n-p}^{p} A_t \cdot Y_{n-t} + D_n =$$

$$= \sum_{t=1}^{p} A_t \cdot Y_{n-t} + \sum_{t=1}^{n-p-1} \sum_{i=p+1}^{n-t} A_t \cdot y_{n-t+p-i} \cdot D_i + D_n =$$

$$= Y_n + \sum_{i=p+1}^{n-1} \sum_{t=1}^{n-p-1} A_t \cdot y_{n-t+p-i} \cdot D_i + D_n =$$

$$= Y_n + \sum_{i=p+1}^{n-1} \sum_{t=1}^{p} A_t \cdot y_{n-t+p-i} \cdot D_i + D_n =$$

$$= Y_n + \sum_{i=p+1}^{n-1} y_{n+p-i} \cdot D_i + y_p \cdot D_n = Y_n + \sum_{i=p+1}^{n} y_{n+p-i} \cdot D_i \; .$$

adódik.

Ha $n \geq 2p$, akkor hasonló átalakításokat végezhetünk:

$$G_n = \sum_{t=1}^{p} A_t \cdot G_{n-t} + D_n = \sum_{t=1}^{p} A_t \cdot \left[Y_{n-t} + \sum_{i=p+1}^{n-t} y_{n-t+p-i} \cdot D_i \right] + D_n =$$

$$= Y_n + \sum_{t=1}^{p} \sum_{i=p+1}^{n-t} A_t \cdot y_{n-t+p-i} \cdot D_i + D_n =$$

$$= Y_n + \sum_{i=p+1}^{n-1} \sum_{t=1}^{p} A_t \cdot y_{n-t+p-i} \cdot D_i + D_n =$$

$$= Y_n + \sum_{i=p+1}^{n} y_{n+p-i} \cdot D_i ,$$

mivel $y_p=1$. Ezzel a teljesindukció gondolatmenete szerint az állítás bebizonyítottuk.

A 2. TÉTEL BIZONYÍTÁSA: Legyen $f_D(x) = \prod_{i=1}^{t} (x-x_i)^{k_i}$, ahol $x_1,\dots,x_t$ zérustól különböző komplex számok, $k_1,\dots,k_t$ pedig olyan pozitiv egészek, amelyek összege r. Mint ahogy láttuk, ekkor D_n egy explicit alakja

(5) $$D_n = \sum_{i=1}^{t} p_i(n) \cdot x_i^n ,$$

ahol $p_i(n)$ k_i-1 ed fokú komplex együtthatós polinom.

Legyen z egy tetszőleges számsorozat, s definiáljuk a következő differencia operátorokat:

$$F_{x_j}(z_n) = z_{n+1} - x_j z_n$$

$$F_{x_j}^k(z_n) = F_{x_j}\left[F_{x_j}^{k-1}(z_n) \right] ,$$

ahol $k>1$ pozitiv egész és $F_{x_j}^1(z_n) = F_{x_j}(z_n)$

Alkalmazzuk ezeket az (5) -beli összegre, majd annak i. tagjára:

$$F_{x_j}(D_n) = F_{x_j}\left[\sum_{i=1}^{t} p_i(n)\cdot x_i^n\right] = \sum_{i=1}^{t} p_i(n+1)\cdot x_i^{n+1} -$$

$$- x_j \sum_{i=1}^{t} p_i(n)\cdot x_i^n = \sum_{i=1}^{t} F_{x_j}\left[p_i(n)\cdot x_i^n\right]$$

illetve

$$F_{x_j}\left[p_i(n)\cdot x_i^n\right] = p_i(n+1)\cdot x_i^{n-1} - x_j\cdot p_i(n)\cdot x_i^n =$$

$$= \left[p_i(n+1) - \frac{x_j}{x_i} p_i(n)\right]\cdot x_i^{n+1} = q_i(n)\cdot x_i^{n+1}$$

adódik, ahol $q_i(n)$ fokszáma k_i-1, ha $i\neq j$; k_i-2 ha $i=j$ és $k_i\neq 1$; ha pedig $k_i=1$, azaz $p_i(n)$ konstans és $i=j$, akkor $q_i(n)=0$. Ez azt jelenti, hogy ha D_n-re alkalmazzuk $F_{x_1}^{k_1}$ -et, majd a kapott kifejezésre $F_{x_2}^{k_2}$ -őt, ... s végül a $t-1$ -edik lépésben kapott kifejezésre a $F_{x_t}^{k_t}$ operátort, akkor zérust kapunk, azaz

$$\left[\prod_{i=1}^{t} F_{x_i}^{k_i}\right](D_n) = 0.$$

Ugyanakkor (1)-ből $D_n = G_n - \sum_{i=1}^{p} A_i\cdot G_{n-i}$ ha $n>p$, tehát

$$\left[\prod_{i=1}^{t} F_{x_i}^{k_i}\right]\left[G_n - \sum_{i=1}^{p} A_i\cdot G_{n-i}\right] = 0, \tag{6}$$

ami azt jelenti, hogy a G elemei kielégítik ezt a $p+r$ -ed rendű rekurziót.

$$F_{x_j}\left[G_n - \sum_{i=1}^{p} A_i\cdot G_{n-i}\right] = G_{n+1} - \sum_{i=1}^{p} A_i\cdot G_{n+1} - x_j\cdot G_n + x_j\cdot \sum_{i=1}^{p} A_i\cdot G_{n-i} =$$

$$= G_{n+1} - \left[A_1 + x_j\right]\cdot G_n + \sum_{i=1}^{p-1}\left[x_j A_i - A_{i+1}\right]\cdot G_{n-i} + x_j\cdot A_p\cdot G_{n-p},$$

ahol az együtthatók rendre megegyeznek az

$$(x-x_j)\cdot\left[x^p-\sum_{i=1}^{p}A_i x^{p-i}\right] = (x-x_j)f_Y(x)$$

polinom együtthatóival. Innen és a (6)-ból már következik, hogy a (6)-beli rekurziónak megfelelő karakterisztikus függvény

$$f_G(x) = \prod_{j=1}^{t}\left(x-x_j\right)^{k_j}\cdot f_Y(x) = f_D(x)\cdot f_Y(x).$$

A 3. TÉTEL BIZONYÍTÁSA: Először belátjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_p$ konstansokkal, $Y_1=G_1$, $Y_2=G_2, \ldots,$ $Y_p=G_p$ kezdőértékekkel meghatározott Y sorozat minden elemére teljesül az

$$(7) \qquad Y_n = \sum_{i=1}^{p} G_i\cdot Y_{n,i}$$

egyenlőség.

Ha $1 \le n \le p$ akkor

$$Y_n = \sum_{i=1}^{p} G_i\cdot Y_{n,i} = G_n\cdot Y_{n,n} = G_n .$$

Tegyük fel, hogy minden j-re, ahol $1 \le j < n$ és $p<n$ teljesül (7). Ezt és az Y előállítását felhasználva

$$Y_n = \sum_{j=1}^{p} A_j\cdot Y_{n-j} = \sum_{j=1}^{p} A_j \sum_{i=1}^{p} G_i\cdot Y_{n-j,i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} G_i \sum_{j=1}^{p} A_j Y_{n-j,i} = \sum_{i=1}^{p} G_i\cdot Y_{n,i}$$

adódik, s igy a teljesindukció gondolatmenete alapján igazoltuk, hogy (7) minden n pozitiv egészre teljesül.

(7)-et és a tétel feltételeit felhasználva, az 1. Tételből

$$G_n = Y_n + \sum_{i=p+1}^{n} y_{n+p-i} \cdot D_i = \sum_{i=1}^{p} G_i \cdot Y_{n,i} + a_0 \cdot \sum_{i=p+1}^{n} y_{n+p-i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} G_i \cdot Y_{n,i} + a_0 \cdot S_{n-1} .$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

IRODALOM

[1] Peter R.J. Asveld, A Family of Fibonacci-Like sequences. Fibonacci Quart. 25, No. 1 (1987), 81-83.

[2] Peter R.J. Asveld, Another Family of Fibonacci-Like sequences, Fibonacci Quart. 25, No. 4 (1987), 361-364.

[3] Marjorie Bicknell-Johnson and Gerald E. Bergum, The generalized Fibonacci Numbers, Applications of Fibonacci numbers (ed. by A.N. Philipou et al), Kluwer Acad. Publ., (1988), 193-205.

[4] M.D' Ocagne, Mémoire sur les suites récurrentes Journal de l'ecole polytechnique, 64 (1884), 151-224.

SZEPESSY BÁLINT

MEGJEGYZÉSEK A VALÓS FÜGGVÉNYEK ITERÁLÁSÁHOZ VI.

(Még egyszer a tetszőleges magasrendű ciklusokról)

ABSTRACT: *(Remarks on iteration of real functions)* *Let* $f(x)$ *be a continuous real valued function on the interval* $[a,b]$ *which maps the interval onto itself. We say c is a fix point of* $f(x)$ *of order* $n(>1)$ *if* $f(c)=c_1$, $f(c_1)=c_2,\dots,f(c_{n-1})=c$ *but* $f(c_r)\neq c$ *if* $1\le r<n-1$. *In this paper, using our earlier methods and results, we give a new proof of the following theorem: "If there is a point e in the interval* $[a,b]$ *for which* $e_3\le e<e_1<e_2$, *where* $e_1=f(e)$, $e_2=f(e_1)$ *and* $e_3=f(e_2)$, *then there exists a fix point of order n in the interval for any natural numer n". This theorem was proved originaly by Tien-Yien Li and James A.Yorke.*

1. BEVEZETÉS

Legyen $f(x)$ az $[a;b]$ $(a<b)$ zárt intervallumban értelmezett olyan egyértékű valós függvény, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

1. $f(x)$ az adott szakasz minden belső pontjában folytonos, a kezdő és a végpontban jobbról, illetve balról folytonos;
2. $f(x)$ az $[a;b]$ intervallumot önmagára képezi le;
3. nincs olyan részintervalluma az adott szakasznak, amelyben $f(x)$ = constans teljesül.

Az f(x) függvényt iterációs alapfüggvénynek nevezzük az adott intervallumon. Az $f_0(x)=x$, $f_1(x)=f(x)$, $f_2(x)=f(f(x)),\dots,f_n(x)=f\left[f_{n-1}(x)\right],\dots$ függvényeket az f(x) függvény 0-dik, első, második, ..., n-edik (n-edrendű),... iterált függvényeinek (iteráltjainak) nevezzük. Az összetett függvény folytonosságára vonatkozó tételekből teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy az f (x) n=2,3,... függvények is mind rendelkeznek az 1.,2.,3 tulajdonságokkal. Teljesülnek az $f_{n+m}(x) = f_n\left[f_m(x)\right] = f_m\left[f_n(x)\right]$ azonosságok.

Ha [c;d] (c<d) az [a;b] szakasz egy részszakasza, akkor pontjainak első iteráltjai is egy szakaszt alkotnak; jele: $[c,d]_1$. (Nyilvánvaló ugyanis, hogy $[c;d]_1=[\min f(x);\ \max f(x)]$, ha $c\le x\le d$). A [c;d] szakasz n-edik iteráltján a $[c;d]_n=\left([c;d]_{n-1}\right)_1$ intervallumot értjük.

Ha f(c)=c, akkor a <u>c</u> pontot az f(x) függvény elsőrendű fixpontjának nevezzük. Ha $f_n(c)\ne c$, $n=1,2,\dots,r-1$ esetén, de $f_r(c)=c$, akkor a <u>c</u> pont az f(x) függvény r-edrendű fixpontja. Ekkor - amint az ismeretes - a c_1, $c_2,\dots$, c_{r-1},c_r fixpontok egy r-edrendű ciklust alkotnak.
Az n-edrendű fixpontok az $y=f_n(x)$ görbe és az y=x átló metszéspontjainak vetületei az abszcisszatengelyen.

Már vizsgáltuk azt a kérdést, hogy milyen iterációs alapfüggvények esetén nem lehet a ciklusok rendszámára felső korlátot adni (Szepessy [8], [9]).
Bebizonyítottuk hogy:

1. Ha az [a,b] szakaszban f(x) az 1.,2.,3 feltételeknek eleget tesz és van két olyan diszjunkt részszakasz, amelyeket a függvény az egész zárt [a;b] szakaszra képez le, akkor van bármilyen magasrendű ciklus.

Ennek a tételnek a feltételei csak elégségesek bármilyen adott rendű ciklus létezéséhez. Ezt igazolják az említett dolgozatok szemléletes példái és a következő tétel:

2. Legyen $a \le c < d < b$ és $f(x)$ az $[a;b]$ szakaszban értelmezett olyan iterációs alapfüggvény, amelyre $f(c)=c$ $f(d)=b$, továbbá van a $[d;b]$ szakasznak olyan $[p;q]$ részszakasza, amelyet $f(x)$ az $[a;b]$ szakaszra képez le. Ekkor bármely (természetes) n szám esetén van az $f(x)$ függvénynek n-edrendű fixpontja.

A tétel bizonyításából kiderül, hogy $a<c$ vagy $q<b$ esetén a tétel érvényessége nem függ az $f(x)$ függvény $[a;c]$ vagy $[q;b]$ szakaszbeli menetétől. Ugyancsak nem befolyásolja a tétel érvényességét $d<p$ esetén $f(x)$ függvény $[d;p]$ szakaszbeli viselkedése sem.

A bizonyítás során kihasználatlanul maradt az alapfüggvénynek az említett szakaszokban való folytonossága is.

Ebben a dolgozatban ezeknek a tételeknek a segítségével és bizonyításaik sajátos, elemi módszerével igazoljuk az alábbi - tételeinknél álktalánosabb - tételt, amelyet Tien-Yien Li és James A. Yorke (alapvetően más bizonyítással) publikált ([7]).

2. MÉG EGYSZER A TETSZŐLEGES MAGASRENDŰ CIKLUSOKRÓL

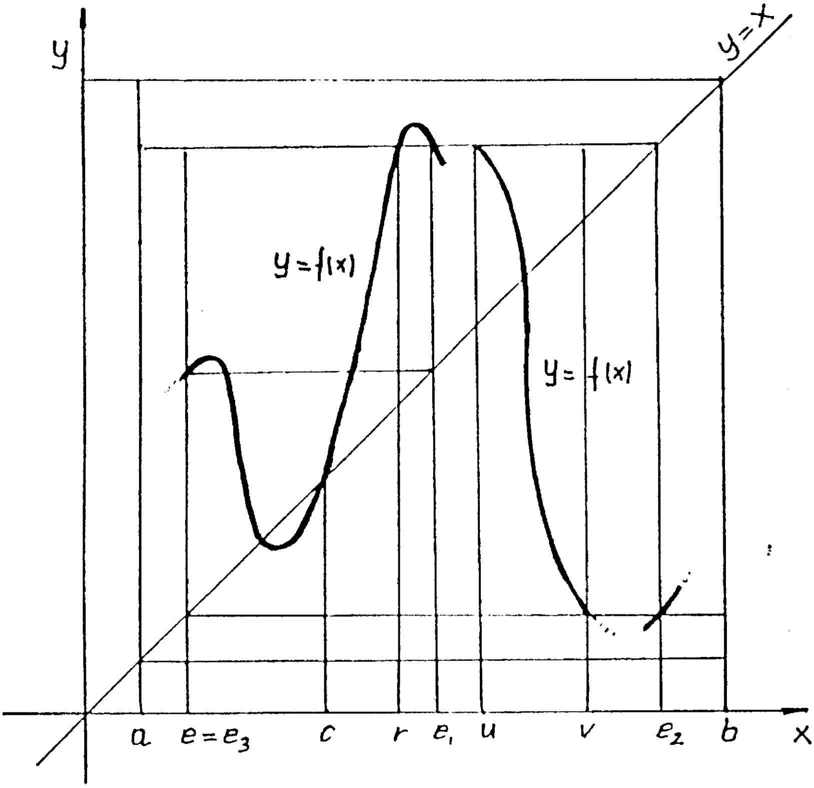
TÉTEL. Legyen $f(x)$ az $[a;b]$ zárt intervallumban értelmezett iterációs alapfüggvény. Ha van az $[a;b]$ szakaszban olyan <u>e</u> pont, amelyre $e_3 \le e < e_1 < e_2$; (vagy $e_3 \ge e > e_1 > e_2$) relációk teljesülnek; akkor van bármilyen n-edrendű ciklus is. (Ahol e_1, e_2 és e_3 az e pont első, második és harmadik iterált pontja).

BIZONYÍTÁS: Elegendő a bizonyítást az $e_3 = e < e_1 < e_2$ esetre elvégezni; más esetekben - az analóg ($e_3 \ge e > e_1 > e_2$) esetben is - a bizonyítás ehhez hasonlóan történik.

Legyen $u = \max\limits_{x \in [e_1; e_2]} \{x\};\ f(x) = e_2$; azaz $\underline{u}$ a legnagyobb abszcisszaérték, amelyben $f(u) = e$ teljesül; és $v = \min\limits_{x \in [u; e_2]} \{x\}, f(x) = e$; azaz $\underline{v}$ az $\underline{u}$-tól jobbra a hozzá legközelebb eső olyan pont, amelyben $f(v) = e$. Ilyen $\underline{u}$ és $\underline{v}$ pont az adott szakaszban létezik, ugyanis – a feltételek szerint – $f(e_1) = e_2$, és $f(e_2) = e$ Az 1.,2.,3 következtében $f(x)$ függvény az $[u; v]$ szakaszban folytonos és ezt a szakaszt az $[e; e_2]$ szakaszra képezi le. Mivel az $f(x) - x$ (folytonos) függvény az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ pontban különböző előjelű – $f(u) - u = e_2 - u > 0$ és $f(v) - v = e - v < 0$ –, ezért van az $[u; v]$ szakaszban zérushelye; azaz $f(x)$ függvénynek elsőrendű fixpontja. Innen a bizonyítás kétfelé ágazik.

a/ Az $[e; u]$ szakaszban van legalább egy elsőrendű fixpont. Legyen $c = \max\limits_{x \in [e; u]} \{x\};\ f(x) = c$ (1. ábra). Az $f(x)$ függvény folytonossága következtében a $[c; u]$ szakaszban van legalább egy olyan pont, amelyben a függvény az e_2 értéket veszi fel; az u például ilyen pont, ugyanis $f(u) = e_2$ teljesül. Legyen ezek közül a c-hez legközelebbi az r pont; azaz $r = \min\limits_{x \in [c; u]} \{x\}$, $f(x) = e_2$. Az $f(x)$ függvény a $[c, r]$ szakaszt a $[c; e_2]$ szakaszra, az $[u; v]$ szakaszt – $[r; e_2]$ részszakaszát – pedig az egész $[e; e_2]$ szakaszra képezi le. A bevezetésben is szereplő második tétel szerint az $[e; e_2]$ szakaszban (sőt annak $[c; r]$ részszakaszában), bármely (természetes) n szám esetén van n-edrendű ciklus.

Ebben az esetben a bizonyítást befejeztük.

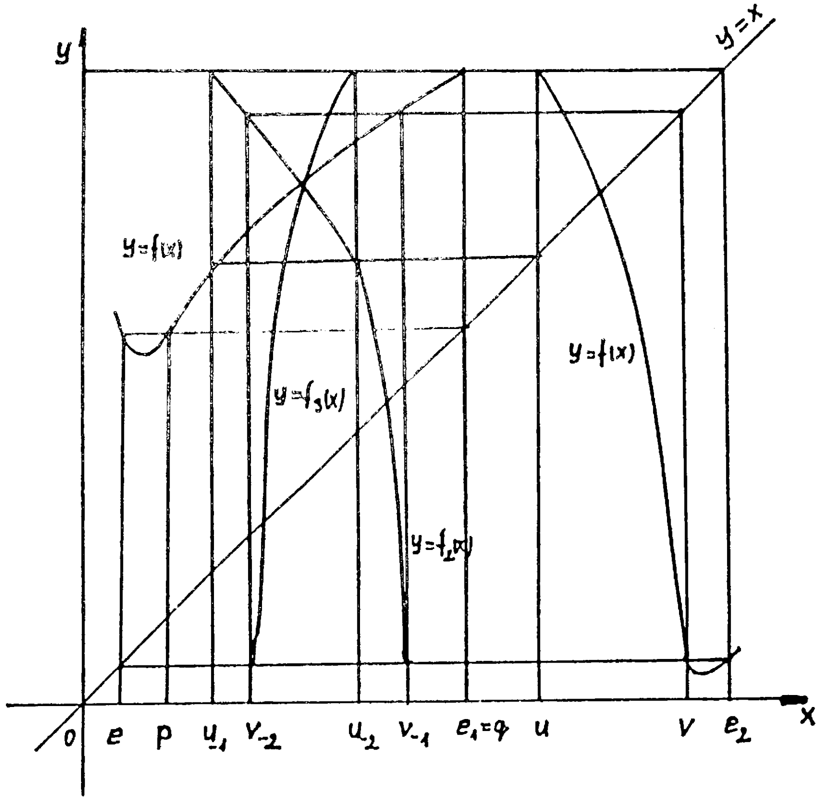


1. ábra

b/ Az [e;u] szakaszban nincs elsőrendű fixpont.

Ebben az esetben a bizonyítás a következőképpen folytatható.

Tekintsük a $q=\min\limits_{x\in[e;e_1]}\{x\},\ f(x)=e_2$ és a $p=\max\limits_{x\in[e;q]}\{x\},\ f(x)=e_1$; pontokat (2. ábra). A feltételek szerint $f(e)=e_1$ és $f(e_1)=e_2$ és $f(x)$ folytonos függvény; tehát van ilyen p és q pont a szóbanforgó szakaszban, és a [p;q] szakaszt a (folytonos) $f(x)$ függvény az $[e_1;e_2]$ szakaszra képezi le. Mivel $e_1\leq u<v<e_2$ ezért mind az <u>u</u> mind a <u>v</u> pontnak van (legalább egy-egy) inverz-iterált pontja a [p;q] szakaszban. Tekintsük a <u>v</u> pont [p;q] szakaszbeli inverz-iteráltjai közül azt, amelynek abszcisszája a legkisebb és jelöljük ezt v_{-1}-gyel; tehát $v_{-1}=\min\limits_{x\in[p;q]}\{x\};\ f(x)=v$. Az u pontnak a [p;q] szakaszbeli inverz-iteráltjai közül a v_{-1} -től balra a hozzá legközelebb esőt választva, legyen ennek abszcisszája u_{-1}; azaz $u_{-1} = \max\limits_{x\in[p;v_{-1}]}\{x\}$; $f(x)=u$. Könnyű megmutatni, hogy $[u_{-1},v_{-1}]_1=[u;v]$ (Szepessy [8]).



2. ábra

Mivel $f_2(u_{-1})=f(u)=e_2$ és $f_2(v_{-1})=f(v)=e$ valamint az $f_2(x)$ iterált függvény az $[u_{-1};v_{-1}]$ szakaszban folytonos, ezért ezt a szakaszt az $[e;e_2]$ szakaszra képezi le (azaz $f_2(x)$ függvény minden $[e_1;e_2]$ szakaszbeli értéket felvesz). Az $f_2(x)-x$ (folytonos) függvény az $[u_{-1};v_{-1}]$ szakasz kezdő és végpontjában különböző előjelű – $f_2(u_{-1})-u_{-1}=e_2-u_{-1}>0$ illetve

$f_2(v_{-1})-v_{-1}=e-v_{-1}<0$ – következésképpen van ebben a szakaszban zérushelye; azaz van olyan $\bar{x}$ pont, amelyben $f_2(\bar{x})=\bar{x}$ teljesül. Tehát $\bar{x}$ pont az $f(x)$ függvénynek legfeljebb másodrendű fixpontja. Az $[u_{-1};v_{-1}]$ szakaszban nincs $f(x)$-nek elsőrendű fixpontja, ezért $\bar{x}$ annak pontosan másodrendű fixpontja.

Az $f_2(x)$ iterált függvény az $[u_{-1};v_{-1}]$ szakaszban minden $[e;e_2]$ szakaszbeli értéket felvesz, ezért mind az $\underline{u}$ mind a $\underline{v}$ pontnak van ebben a szakaszban az $f_2(x)$ iterált függvényre vonatkozóan inverz-iterált pontja, legyen $u_{-2}=\min\limits_{x\in[u_{-1};v_{-1}]}\{x\};\ f_2(x)=u$ és $v_{-2}=\max\limits_{x\in[u_{-1};u_{-2}]}\{x\};\ f_2(x)=v$. Mivel $f_2(v_{-2})=v$ és $f_2(u_{-2})=u$ és $f(x)$ az $[u;v]$ szakaszt az egész $[e;e_2]$ szakaszra képezi le, ezért a $[v_{-2};u_{-2}]$ szakaszban az $f_3(x)$ iterált függvény is minden $[e;e_2]$ szakaszbeli értéket felvesz. Az $f_3(x)-x$ (folytonos) függvény e szakasz kezdő és végpontjában különböző előjelű – $f_3(v_{-2})-v_{-2}=f(v)-v_{-2}=$ $=e-v_{-2}<0$, illetve $f_3(u_{-2})-u_{-2}=e_2-u_{-2}>0$ –, ezért van a $[v_{-2};u_{-2}]$ szakaszban zérushelye; azaz van olyan $\hat{x}\left(\in[v_{-2};u_{-2}]\right)$ pont, amelyre $f_3(\hat{x})=\hat{x}$ teljesül. Az $\hat{x}$ pont legfeljebb harmadrendű fixpontja az $f(x)$ függvénynek. Az u_{-2} értelmezéséből következik egyrészt, hogy $u_{-2}<v_{-1}$; másrészt, hogy az $f(x)$ függvény $[u_{-1};v_{-1}]$ szakaszbeli másodrendű fixpontjai mind az $[u_{-2};v_{-1}]$ szakaszban vannak; ezért $\hat{x}$ pontosan harmadrendű fixpontja az $f(x)$ függvénynek.

Képezzük ezután a $c=\max\limits_{x\in[v_{-2};u_{-2}]}\{x\};\ f_3(x)=x$ pontot, valamint a következő $g(x)$ függvényt: $g(x)=f_3(x)$ ha $x\in[v_{-2};u_{-2}]$ és $g(x)=f(x)$ ha $x\in[u;v]$. A $g(x)$ függvény mind a $[c;u_{-2}]$, mind az $[u,v]$ szakaszban folytonos és az előbbit a $[c;e_2]$ szakaszra az utóbbit pedig az egész $[e;e_2]$ szakaszra képezi le.

A bevezetőben szereplő második tétel (Szepessy [9]) szerint a $[c;u_{-2}]$ szakaszban bármely (természetes) n szám esetén van a $g(x)$ függvénynek n-edrendű fixpontja; azaz $f(x)$ függvénynek negyed, ötöd,...,n-ed,...rendű fixpontja.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

IRODALOM

[1] B. Barna, Über die Iteration reeller Funktionen I, Publ. Math. (Debrecen) 7 (1960), 16-40.

[2] B. Barna, Über die Iteration reeller Funktionen II, Publ. Math. (Debrecen) 13 (1966), 169-172.

[3] B. Barna, Berichtigung zur Arbeit "Über die Iteration reeller Funktionen II.", Publ. Math. (Debrecen) 20 (1973), 281-282.

[4] B. Barna, Über die Iteration reeller Funktionen III, Publ. Math. (Debrecen) 22 (1975), 269-278.

[5] L. Berg, (Rostock) Über irreguläre Iterations - folgen, Publ. Math. (Debrecen) 17 (1970), 112-115.

[6] A. Ralston, A first course in numerical analysis (Mc Grax - Mill. Inc.), New York, 1965.

[7] Tien-Yien Li and James A.Yorke, Period three implies chaos, Amer.Math.Monthly 8 2 (10.), 985-992. (1975).

[8] Szepessy B, Megjegyzések a valós függvények iterálásához I, Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Füzetei XV. (Eger, 1979.), 395-405.

[9] Szepessy B, Megjegyzések a valós függvények iterálásához III, (A tetszőleges magasrendű ciklusokról), Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Füzetei XVII. (Eger, 1984.), 835-843.

ALEKSANDER GRYTCZUK AND JAROSŁAW GRYTCZUK

ON GENERATORS IN MULTIPLICATIVE GROUP OF THE FIELD Z_p

ABSTRACT: *In the paper the following theorem is proved: "Let Z_p^* be the multiplicative group of the field Z_p, where $p=2q+1$ and p,q are odd primes. Then 2, $q+1$, -2^2 and $-(q+1)^2$ are generators in the group Z_p^* if $p=8k+3$ and q, $2q-1$, $-q^2$ and $-(2q-1)^2$ are generators in Z_p^* if $p=8k+7$". This result is an extension of some earlier ones.*

Baum [1] has given an interesting criteria for certain primitive roots. Wilansky [2], using only the Legendre symbol, proved the following result: Let p and q are odd primes and $p=2q+1$. If $q\equiv1 \pmod 4$, then $q+1$ is a primitive root modulo p, while if $q\equiv3 \pmod 4$, then q is a primitive root modulo p.

In the present note we give some extension of this result proving the following theorem:

THEOREM. Let Z_p^* be the multiplicative group of the field Z_p, where $p=2q+1$ and p,q are odd primes. Then 2, $q+1$, -2^2 and $-(q+1)^2$ are generators in the group Z_p^* if $p=8k+3$ and q, $2q-1$, $-q^2$ and $-(2q-1)^2$ are generators in Z_p^* if $p=8k+7$.

For the proof of the Theorem we nead two lemmas.

LEMMA 1. Let Z_p^* be the multiplicative group of the field Z_p where $p=2q+1$ and p,q are odd primes and let NR_p be the set of the quadratic non-residues modulo p. Then the set $NR_p\setminus\{2q\}$ is the set of all generators of the group Z_p^*.

PROOF OF LEMMA 1: Let R_p be the set of all quadratic residues modulo p. Then we have that R_p is a subgroup of Z_p^* and since $p=2q+1$ the group R_p has the order q. If $b \in R_p$ then b is not a generator in Z_p^*. Since

$$(2q)^{\frac{p-1}{2}} = (p-1)^q \equiv (-1)^q = -1 (\mathrm{mod}\ p),$$

hence by Euler Theorem we get $2q \in NR_p$. On the other hand we have

$$(2q)^2 = (p-1)^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$$

and therefore 2q has the order 2 and cannot be a generator in Z_p^*. But the group Z_p^* has exactly

$$\varphi\ (p-1) = \varphi\ (2q) = q-1$$

generators and therefore the set $NR_p \setminus \{2q\}$ is the set of all generators in Z_p^*.

LEMMA 2. Let g be a generator of the group Z_p^* where $p=4k+3$. Then $-g^2$ is also a generator in Z_p^*.

PROOF OF LEMMA 2: Let $p=4k+3$ and g be a generator in Z_p^*. Then we have

$$Z_p^* = \left\{ g^k\ ;\ k=1,2,\dots.p-1 = 4k+2 \right\}.$$

By Euler theorem we have

$$g^{\frac{p-1}{2}} = -1 \quad \text{and therefore} \quad g^{2k+1} = -1.$$

From last equality we get

$$(2.1) \qquad -g^2 = g^{2k+3}$$

It is easy to see that $(2k+3,\ 4k+2=p-1)=1$ and therefore g^{2k+3} is a generator in Z_p^* thus by (2.1) Lemma 2 follows.

PROOF OF THE THEOREM. First we remark that if $p=2q+1$ where p,q are odd primes then $p=4m+3$, because for $p=4m+1$ the equality $p=2q+1$ is imposible. Hence $p=8k+3$ or $p=8k+7$. If

$p=8k+3$ then $\left(\frac{2}{p}\right)= -1$ and the number 2 is a quadratic non-residue modulo p. From Lemma 1 we get that 2 is a generator in Z_p^*. On the other hand we have

$$2(q+1) = 2q+2 = 2q+1+1 = p+1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$$

and therefore $q+1$ is a generator in Z_p^* as the inverse element with respect to 2.

Let $p=8k+7$, then $\left(\frac{2}{p}\right)= +1$ and 2 is not a generator in Z_p^*. Since there are exactly $\varphi(p-1)$ generators in Z_p^* and the element 1 is not a generator thus there exists at least one number g such that $(g,p-1)>1$ and g is a generator in Z_p^*. Because $p=2q+1$ thus $q|p-1$ and $(q,p-1)>1$ and 2 is not a generator thus the number q must be a generator in Z_p^*. We have

$$q(2q-1) = q(2q+1-2) = q(p-2) \equiv -2q = 1-p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p).$$

and so $2q-1$ is a generator in Z_p^*. The last part of assertion follows from Lemma 2 and the proof is complete.

REFERENCES

[1] J. D. Baum, A note on primitive roots, Math,Mag. 38 (1965) 12-14.

[2] A. Wilansky, Primitive roots without quadratic reciprocity, Math.Mag. 49 (1976), 146.

ALEKSANDER GRYTCZUK AND MAREK SZAŁKOWSKI

SPECTRAL PROPERTIES OF SOME MATRICES

ABSTRACT: *In this paper we show some spectral properties of matrices. Among others we prove some inequalities for the characteristic roots of matrices satisfying some conditions. We also give a new proof for a theorem of Szulc.*

In 1984 N.W. Kuharenko [2] proved the following spectral property of n×n real matrix A.

THEOREM A (N.W. KUHARENKO). Let $A = (a_{ij})$ be an n×n real matrix and let

$$\mathrm{Tr}\ A = 0 \quad \text{and} \quad A_2 = \sum_{1 \le i < j \le n} \left(a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji}\right) > 0.$$

Then there exists at least one pair of complex-conjugate eigen-values

$$\lambda_k = c_k \pm i d_k$$

of A such that

$$d_k^2 \ge c_k^2 + \frac{2}{n} A_2 .$$

This theorem has application in the theory of dynamical systems.

In 1988 T. Szulc [3] gave the following generalization of Theorem A.

THEOREM B. Let $A = (a_{ij})$ be n×n real matrix such that

$$\mathrm{Tr}^2\ A < \frac{2n}{n-1}\ A_2$$

Then there exists at least one pair of complex-conjugate eigen-values

$$\lambda_k = c_k \pm i d_k$$

of A such that

$$(1.1) \qquad d_k^2 \geq \begin{cases} \dfrac{2nA_2 - (n-1)\mathrm{Tr}^2 A}{n(n-1)} & \text{if } n \text{ is odd} \\[2ex] \dfrac{2nA_2 - (n-1)\mathrm{Tr}^2 A}{n^2} & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

Moreover if

$$(1.2) \qquad \mathrm{Tr}^2\, A \leq 2\, A_2$$

then

$$(1.3) \qquad d_k^2 \geq \begin{cases} c_k^2 + \frac{1}{n-1}\left(2A_2 - \mathrm{Tr}^2 A\right) & \text{if } n \text{ is odd} \\[2ex] c_k^2 + \frac{1}{n}\left(2A_2 - \mathrm{Tr}^2 A\right) & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

In the present paper we give another proof of Theorem B. Moreover we prove the following theorems:

THEOREM 1. Let $A \in M_n(\mathbb{Z})$, where $M_n(\mathbb{Z})$ denote the set of all $n\times n$ matrices over $\mathbb{Z}$ and let A be non-singular matrix. The necessary and sufficient condition for λ_j, $j=1,2,\ldots,n$ to be a roots of unity is $|\lambda_j|=1$ for $j=1,2,\ldots,n$.

THEOREM 2. Let $A=(a_{ij})$ be an $n\times n$ complex matrix with $|\det A|>1$ and let $|\overline{\lambda}| = \max\limits_{1\leq j\leq n} |\lambda_j|$ where λ_j are the characteristic roots of A for $j=1,2,\ldots,n$, then

$$|\overline{\lambda}| > 1 + \frac{\log|\det A|}{n}.$$

THEOREM 3. Let $|\overline{\lambda}| = \max\limits_{1\leq j\leq n} |\lambda_j|$ where λ_j for $j=1,2,\ldots,n$ are characteristic roots of $A \in M_n(\mathbb{Z})$, $n\geq 2$ and let the characteristic polynomial of A be irreducible over $\mathbb{Z}$. If for some $j=1,2,\dots,n$ the root λ_j is not a root of unity then

$$|\overline{\lambda}| > 1 + \frac{\log c}{1+N_0}$$

where $c\geq 2$ is some real number and N_0 depend only on n and c.

We remark that from Theorem 2 it follows immediately:

COROLLARY 1. Let $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 2$ and $\det A \neq \pm 1$. Then

$$|\overline{\lambda}| > 1 + \frac{\log 2}{n}.$$

From Corollary 1 it follows that a conjecture of Schinzel and Zassenhaus [2] is true for all matrices $A \in M_n(\mathbb{Z})$ with $\det A \neq \pm 1$.

PROOF OF THEOREM 1. It is easy to see that if $\lambda_j^m = 1$ for $j=1,2,\dots,n$ then $|\lambda_j|=1$. Suppose that $|\lambda_j|=1$ for $j=1,2,\dots,n$ and let

(1) $$f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

be the characteristic polynomial of A. Then we have

(2) $$f(\lambda) = \lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \dots + A_n$$

where $A_i \in \mathbb{Z}$ and $A_n = \det A \neq 0$. Since $|\lambda_j|=1$ for $j=1,2,\dots,n$ thus by formulas of Viete it follows

(3) $$|A_k| \leq \binom{n}{k}$$

for $k=1,2,\dots,n$.

From (3) it follows that there exist only finite number of polynomials with integer coefficients such that

$$|\lambda_j|=1 \text{ for } j=1,2,\dots,n.$$

Consider the following sequence

(4) $$f_m(\lambda)=\left(\lambda-\lambda_1^m\right)\left(\lambda-\lambda_2^m\right)\dots\left(\lambda-\lambda_n^m\right)=\lambda^n + A_1^{(m)}\lambda^{n-1}+\dots+A_n^{(m)}$$

where $A_j^{(m)} \in \mathbb{Z}$. The sequence (4) has only finite number of distinct elements, because

$$|\lambda_j^m| = |\lambda_j|^m = 1 \text{ and } |A_j^{(m)}| \leq \binom{n}{k} \;;\; j,k=1,2,\dots,n.$$

Therefore we can take a subsequence $\left\{f_{m_i}(\lambda)\right\}$ such that

(5) $$f_{m_0}(\lambda) = f_{m_1}(\lambda) = f_{m_2}(\lambda) = \dots$$

where $m_0 < m_1 < m_2 < \dots$. From (4) and (5) we get

(6) $$\lambda_1^{m_i} = \lambda_{\sigma(1)}^{m_0},\ \lambda_2^{m_i} = \lambda_{\sigma(2)}^{m_0},\ \dots,\ \lambda_n^{m_i} = \lambda_{\sigma(n)}^{m_0}$$

where $\left\{ \sigma(1), \dots, \sigma(n) \right\}$ denotes some permutation of $\left\{1,2,\dots,n\right\}$. There are infinitely many exponents m_i such that $m_1 < m_2 < \dots$. On the other hand there exists only $n!$ permutations of the set $\left\{1,2,\dots,n\right\}$. Therefore there are exponents m_{i_1} and m_{i_2} for which

(7) $$\lambda_1^{m_{i_1}} = \lambda_1^{m_{i_2}},\ \lambda_2^{m_{i_1}} = \lambda_2^{m_{i_2}},\ \dots,\ \lambda_n^{m_{i_1}} = \lambda_n^{m_{i_2}}$$

From (7) we get

$$\lambda_j^m = 1 \quad \text{for} \quad j=1,2,\dots,n$$

where $m=m_{i_1}-m_{i_2}$ and $m_{i_1}-m_{i_2} > 0$ and the proof is complete.

PROOF OF THEOREM 2. Let $f(x)$be the characteristic polynomial of the matrix A. It is well-known that

(8) $$|\lambda_1\cdots\lambda_n| = |\det A|.$$

Since $|\lambda_j| \le |\bar{\lambda}|$ for $j=1,2,\dots,n$, thus by (8) it follows

(9) $$|\bar{\lambda}| \ge |\det A|^{1/n} .$$

Since $|\det A|>1$ thus we have

(10) $$|\det A|^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log|\det A|} = 1 + \frac{1}{n}\log|\det A| + \dots$$

From (10) we get

(11) $$|\det A|^{\frac{1}{n}} > 1 + \frac{1}{n}\log|\det A| .$$

From (11) and (9) we obtain

$$|\overline{\lambda}| > 1 + \frac{\log|\det A|}{n}$$

and the proof is complete.

PROOF OF THEOREM 3. Let N_o denotes the set of all roots of the characteristic polynomials of fixed degree $n \geq 2$ with integer coefficients and irreducible over $\mathbb{Z}$ such that $|\lambda| \leq c$, where $c \geq 2$ is some real number. Suppose that for every $j=1,2,\dots,n$ we have

(12) $$|\lambda_j| \leq c^{\frac{1}{1+N_o}}$$

From (12) we get

(13) $$|\lambda_j^k| \leq |\lambda_j|^k \leq c^{\frac{k}{1+N_o}} \leq c$$

for $k=1,2,\dots,1+N_o$. From (13) and definition of N_o we get that there exists $k_1^{(j)} \neq k_2^{(j)}$ such that $k_1^{(j)}, k_2^{(j)} \in \left\{1,2,\dots,1+N_o\right\}$ and

(14) $$\lambda_j^{k_1^{(j)}} = \lambda_j^{k_2^{(j)}} \quad \text{for } j=1,2,\dots,n.$$

From (14) we get

$$\lambda_j^m = 1 \quad \text{for } j=1,2,\dots,n \quad \text{where } m = k_1^{(j)}-k_2^{(j)}$$

and λ_j is a root of unity for $j=1,2,\dots,n$.

By the assumption of our theorem if follows that there exist some $j \in \left\{1,2,\dots,n\right\}$ such that

(15) $$|\lambda_j| > c^{\frac{1}{N_o+1}} .$$

From (15)

$$|\overline{\lambda}| = \max_{1\leq j\leq n} |\lambda_j| \geq c^{\frac{1}{1+N_o}} = e^{\frac{1}{1+N_o}\log c} > 1 + \frac{\log c}{1+N_o}$$

follows and the proof is complete.

PROOF OF THEOREM B. We have the well-known identity

(16) $\quad \mathrm{Tr}(A^2) = \mathrm{Tr}^2 A - 2A_2$.

On the other hand we have

(17) $$\mathrm{Tr}(A^2) = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Re}\ \lambda_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Im}\ \lambda_i\right)^2$$

and

(18) $$\mathrm{Tr}^2 A = \left(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n \right)^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}\ \lambda_i \right]^2$$

From (16) - (18) we obtain

$$\mathrm{Tr}(A^2) = \frac{1}{n} \mathrm{Tr}^2 A + \frac{(n-1)\mathrm{Tr}^2 A - 2nA_2}{n} ,$$

thus

$$\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 - \frac{1}{n} \left(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n\right)^2 = \frac{(n-1)\mathrm{Tr}^2 A - 2nA_2}{n} < 0.$$

Since the left hand side cannot be negative for all real λ_i then we get that there exists at least one characteristic root which is a complex number.

From (16) - (18) we obtain

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Re}\ \lambda_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Im}\ \lambda_i\right)^2 = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}\ \lambda_i \right]^2 + \frac{(n-1)\mathrm{Tr}^2 A - 2nA_2}{n}$$

and therefore we get

(19) $$\sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Im}\ \lambda_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Re}\ \lambda_i\right)^2 - \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}\ \lambda_i \right]^2 + \frac{2nA_2 - (n-1)\mathrm{Tr}^2 A}{n}$$

Let

(20) $$d = \max_{1\le i\le n} |\mathrm{Im}\ \lambda_i|$$

Then from (19) and (20) we obtain

(21) $$k\ d^2 \ge \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Im}\ \lambda_i\right)^2 \ge \frac{2nA_2-(n-1)\mathrm{Tr}^2A}{n},$$

where $k\le n$ if n is even and $k\le n-1$ if n is odd. From (21) we obtain (1.1).

Now, suppose that (1.2) is true and let

$$x_k = \left(\mathrm{Re}\ \lambda_k\right)^2 - \left(\mathrm{Im}\ \lambda_k\right)^2$$

Then we have

(22) $$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k = \mathrm{Tr}^2A - 2A_2 \le 0.$$

From (22) we get that there exists at least one complex number such that $\mathrm{Im}\ \lambda \ne 0$. Let

(23) $$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k = B + \sum_{l=1}^{m} x_{k_1} = \mathrm{Tr}^2A - 2A_2$$

where B denotes the sum of squares of all real eigenvalues of A and let

(24) $$x_{k_d} = \min_{1\le k_j\le m} \left(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_m}\right) = \min_{1\le j\le m} \left(x_{k_j}\right).$$

Then from (23) and (24) we obtain

(25) $$m\ x_{k_d} \le \sum_{l=1}^{n} x_{k_l} \le \mathrm{Tr}^2A - 2A_2.$$

From (25) we get

$$x_{k_d} = \left(\mathrm{Re}\ \lambda_{k_d}\right)^2 - \left(\mathrm{Im}\ \lambda_{k_d}\right)^2 \le \frac{1}{m}\left(\mathrm{Tr}^2 A - 2A_2\right) \tag{26}$$

where $m \le n$ if n is even and $m \le n-1$ if n is odd.

It is easy to see that from (25) we get (1.3) and therefore the proof of Theorem B is complete.

REFERENCES

[1] N.W. Kuharenko, On spectral property of a zero-trace matrix, Mat. Zametki 35 (2), (1984), 149-151 (Russian).

[2] A. Schinzel and H. Zassenhaus, A refinement of two theorems of Kronecker, Mich.Math.J. 12 (1965), 81-84.

[3] T. Szulc, On some spectral properties of matrices with real entries, Z.Angew.Math.Mech. 68, (1988), 320-322.

KRYSTYNA GRYTCZUK

FUNCTIONAL RECURRENCES AND DIFFERENTIAL EQUATIONS

ABSTRACT: *In this paper we show connections among solutions of differential equations, power matrices and functional recurrences. The results can be used to investigate some functional recurrences connected with number theoretic polynomials.*

In the paper [1], some connections was given among solutions of differential equations of second order, power matrices and functional recurrences. We have proved the following theorem:

THEOREM A. Let s_0, t_0, u, v be functions of x and let λ be a constant satisfying the following conditions:

(i) $s_0, t_0, u, v \in C^2(J)$ where $J=(x_1, x_2)\subset R$

(ii) $u \neq 0$, $v \neq 0$ on J and $\lambda \in R_+$.

Then the functions

$$y_1 = s_0 \cdot u^\lambda \quad , \quad y_2 = t_0 \cdot v^\lambda$$

are the solutions of the differential equation

$$D_0 y'' + D_1 y' + D_2 y = 0$$

where

$$D_0 = \det\begin{bmatrix} s_0 & s_1 \\ t_0 & t_1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \det\begin{bmatrix} s_2 & s_0 \\ t_2 & t_0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \det\begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix}$$

and

$$s_1 = s_0' + \lambda\, s_0 \frac{u'}{u}, \qquad s_2 = s_1' + \lambda\, s_1 \frac{u'}{u}$$

$$t_1 = t_0' + \lambda\, t_0 \frac{v'}{v}, \qquad t_2 = t_1' + \lambda\, t_1 \frac{v'}{v}.$$

Theorem A has been used to investigation of some functional recurrences connected with number theoretic polynomials, in particular Pell, Lucas and Fibonacci polynomials.

In the present paper we give some generalization of Theorem A. Namely we prove the following theorem:

THEOREM B. Let $s_{0,k}$, u_k be functions of x for $k=1,2,\ldots,n$ and let λ be a constant satisfying the following conditions:

(a) $s_{0,k}, u_k \in C^{(n)}(J)$, where $J=(x_1,x_2)\subset R$ for $k=1,2,\ldots n$;

(b) $u_k \neq 0$ on J for $k=1,2,\ldots,n$ and $\lambda \in R_+$.

Then the functions

(1) $y_1 = s_{0,1}\cdot u_1^{\lambda}$, $y_2 = s_{0,2}\cdot u_2^{\lambda}$, $\ldots y_n = s_{0,n}\cdot u_n^{\lambda}$

are the solutions of the differential equation

(2) $P_0 y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1} y^{(1)} + P_n\cdot y = 0$,

where

(3) $P_{j-1} = (-1)^j\cdot D_{1,j-1}$; $j=1,2,\ldots,n+1$

and $D_{1,j-1}$ denotes the minor of the matrix S which we get by deleting the first row and j-kolumn of the matrix S, where

(4) $$S = \begin{bmatrix} s_{n,1} & s_{n-1,1} & \ldots & s_{0,1} \\ s_{n,1} & s_{n-1,1} & \ldots & s_{0,1} \\ s_{n,2} & s_{n-1,2} & \ldots & s_{0,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n,n} & s_{n-1,n} & \ldots & s_{0,n} \end{bmatrix}$$

and

(5) $$s_{l,k} = s_{l-1,k}' + \lambda\cdot s_{l-1,k}\cdot \frac{u_k'}{u_k}$$

for $l,k=1,2,\ldots,n$.

PROOF OF THEOREM B. Let us denote

$$L(y) = P_0 y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \ldots + P_n y$$

then for $y_1 = s_{0,1}\cdot u_1^{\lambda}$ we have

$$L(y_1) = L\left(s_{0,1}\cdot u_1^{\lambda}\right) = P_0\left(s_{0,1}\cdot u_1^{\lambda}\right)^{(n)} + \ldots + P_n\left(s_{0,1}\cdot u_1^{\lambda}\right).$$

It is easy to see that

$$\left(s_{0,1}\cdot u_1^{\lambda}\right)' = s'_{0,1}\cdot u_1^{\lambda} + \lambda\cdot s_{0,1}\cdot u_1^{\lambda-1}\cdot u'_1 = u_1^{\lambda}\left(s'_{0,1}+\lambda\cdot\frac{u'_1}{u_1}\right).$$

Putting in the last equality

$$s'_{0,1} + \lambda\cdot\frac{u'_1}{u_1} = s_{1,1}$$

we get

$$\left(s_{0,1}\cdot u_1^{\lambda}\right)' = s_{1,1}\; u_1^{\lambda}\ .$$

Similarly we get

$$\left(s_{0,1}\cdot u_1^{\lambda}\right)^{(k)} = \left(s_{k-1,1}\cdot u_1^{\lambda}\right)' = s_{k,1}\cdot u_1^{\lambda}$$

for $k=2,3,\ldots,n$. Thus we get

$$L\left(s_{1,0}\cdot u_1^{\lambda}\right) = P_0\cdot s_{n,1}\cdot u_1^{\lambda} + P_1\cdot s_{n-1,1}\cdot u_1^{\lambda} + \ldots + P_n\cdot s_{0,1}\cdot u_1^{\lambda} =$$

$$= \left(P_0\cdot s_{n,1} + P_1\cdot s_{n-1,1} + \ldots + P_n\cdot s_{0,1}\right)\cdot u_1^{\lambda}\ .$$

We remark that from (4)

(6) $\qquad \det S = 0.$

follows. On the other hand from (4) we have

(7) $\qquad \operatorname{Det} S = s_{n,1}\cdot D_{1,0} - s_{n-1,1}\cdot D_{1,1} + \ldots + s_{0,1}(-1)^n D_{1,n+1}.$

Since

$$P_{j-1} = (-1)^j\, D_{1,j-1} \qquad \text{for } j=0,1,\ldots,n+1$$

thus by (6) and (7) it follows

$$L\left(s_{0,k}\cdot u_k^{\lambda}\right) = 0 \qquad \text{for } k=2,\dots,n$$

and the proof is complete.

From Theorem B we get the following.

COROLLARY. Let the assumption of theorem B be satisfied and let

$$s_{0,1} = s_{0,2} = \dots = s_{0,n} = 1.$$

If the functions $u_1, \dots, u_n$ are linearly independent over R then the general solution of the differential equation (2) is of the form

$$y = c_1\, u_1^{\lambda} + c_2\, u_2^{\lambda} + \dots + c_n\, u_n^{\lambda}$$

where $c_1, c_2, \dots, c_n$ are arbitrary constans.

REFERENCE

[1] A. Grytczuk and K. Grytczuk, Functional recurrences, Proceedings of the Pisa Conference (1988), to appear.

MÓDSZERTANI DOLGOZATOK

PELLE BÉLA

GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK AZ ÁLTALÁNOS ISKOLÁBAN

RESÜMEE: *(Geometrische transformatione in der Schule I) Seit eineger Zeit verstärken sich die Versuche, den geometrischen Unterricht in den Prozeß der Urngestaltung und Modernisierung des mathematichen Unterrichts dadurch einzubeziehen, daß den eindeutigen (geometrischen) Abbildungen der Ebene auf sich, den Transformationen, der ihnen gebührende zentrale Platz eingeräumt wird. Dem Vorschlag liegt ein axiomensystem Zugrunde, das aus dem Hilbertschen durch gewisse Änderungen entsteht. Die Hilbertxchen Kongruenzaxiome werden durch solche der Spiegelung ersetzt, durch Zusammensetzung von Spiegelungen die Bewegungen (Kongruenztransformatione) gewonnen. Mit diesen Transformationen untersucht man die Eigenschaften Figuren der Ebene. Diese Verhandlung muß man in der Grundschule gegründen.*

Der propädeutische Unterricht erarbeitet wesentliche Inhalte der Hilbertschen Axiomengruppen der Verknüpfung, Anordnung, Parallelität sowie gewisse Sachverhalte der Kongruenzlehre (gleich lange Strecken, gleich große Winkel, Spiegelungen an Geraden).

Geometriai transzformációk az általános iskola alsó tagozatában

Az 1987-88. tanévtől valószínű új tanterv szerint taníthatjuk a geometriát. Ennek a tantervnek a második változata az 1990-91-es tanévtől indul a 7. osztályban. Az új tananyagból a geometriai transzformációk tanításával kapcsolatban írok le néhány gondolatot. Ebben a dolgozatban először a transzformációkról szólok általában, majd a transzformációk tanításának alsó tagozatos előkészítését foglalom össze. A következő kötetekben a tengelyes tükrözés, eltolás, forgás, hasonlósági transzformációk tanításával kapcsolatos elképzeléseimet akarom leírni.

Az általam vázolt felépítés egy egyéni elgondolás a geometriai transzformációk tanítására. Azért írom le, hogy a tankönyvírók vagy a nevelők, ha találnak benne felhasználható gondolatokat, hasznosítsák. Nem állítom, hogy ez az elképzelés a legjobb, legtökéletesebb. Bizton remélem azonban, hogy tartalma, koncepciója újabb gondolatokat szülhet az e témakört művelők körében.

Az általános iskolai geometria korszerűbb tanítását én - valószínű - speciálisan fogom fel. A geometriát minden iskolatipusban valamilyen elfogadott axiomarendszert figyelembevéve tanítjuk. Nem axiomatikusan, hanem egy axiomarendszert alapul véve, azt követve, arra figyelve építjük fel a geometriát. Ez az axiómarendszer igen hosszú ideig az euklideszi axiómarendszer volt. Később a tökéletesebb hilberti axiómarendszer vette át ezt a szerepet. A század eleji korszerűsítési törekvések felvetették a kleini elgondolás érvényesülését az iskolai geometriaoktatásban. Ennek lényege az, hogy a síkot illetve teret ponthalmazként fogjuk fel. A ponthalmazok részhalmazainak egyrésze a geometriai alakzatok. A tér illetve a sík ponthalmazához transzformációcsoportot rendelünk, amelyek a ponthalmazt önmagára képezik le, és a ponthalmazból felépülő alakzatoknak azokat a tulajdonságait vizsgáljuk, amelyek egy adott transzformációcsoporttal szemben változatlanok (invariánsak). Igy, ha az auklideszi tér- vagy sík ponthalmazához a hasonlósági transzformációcsoportot rendeljük, és ezzel vizsgáljuk a geometriai alakzatok invariáns tulajdonságait, az euklideszi geometriát kapjuk. Ha az euklideszi teret (síkot) kiegészítjük a végtelen távoli elemekkel, és ehhez a ponthalmazhoz a projektiv transzformációt rendeljük, akkor a projektiv geometriát kapjuk.

Ezek alapján olyan axiómarendszerek születtek, amelyek a hilberti axiómarendszert vették alapul, és módosították azt a transzformációkra vonatkozó axiómákkal. Két módosított változata terjedt el. Egyik a mozgási axiómacsoportra épített geometria, másik a tükrözési axiómacsoportra épített geometria néven vált ismertté. Jelenleg az iskolai geometria felépítésénél a mozgási axiómacsoporttal vagy a tükrözési axiómacsoporttal módosított hilberti axiómarendszerre alapozott geometriát oktatjuk. Először a mozgásra, mint geometriai transzformációra épitettünk, vagyis ezzel vizsgáltuk az alakzatok tulajdonságait. Mozgás alatt a síkon párhuzamos illetve metsző tengelyekre történő tükrözések egymásutánját értettük, tehát páros tengelyre történő tükrözések egymásutánját. Magától értetődően vetődött fel a gondolat, hogy még egyszerűbbé válik az iskolai geometria felépítése, ha tükrözésekkel kezdjük, és a tükrözési axiómacsoporttal módosított hilberti axiómacsoport adja az alapját az iskolai geometria oktatásának. Jelenleg tehát egy tengelyre, két tengelyre történő tükrözések sorozatával foglalkozunk, a tengelyes tükrözéssel, eltolással, forgással és centrális tükrözéssel. Utalunk arra, hogy a tengelyes tükrözések összetételét egybevágósági transzformációnak nevezzük, az egybevágósági transzformáció és centrális nyújtás összetételét pedig hasonlósági transzformációnak mondjuk. Az euklideszi sík alakzatainak tulajdonságait ezekkel a transzformációkkal vizsgáljuk.

Sokan korszerű elvnek tekintik a sík- és térgeometria egységes tárgyalását. Arra hivatkozunk, hogy a térben élünk, első benyomásainkat innen szerezzük. Ez mind igaz. Azonban nem a térbeli tárgyakkal dolgozik a geometria. Ezekből modelleket alkot. A térbeli modelleket általában síkbeli modellekből építjük fel. A síkbeli modellek nélkül nem tudjuk a térbeli modelleket megismerni. Az általános iskolában tehát együtt építjük a teret és a síkot, de a síkbeli alakzatok tulajdonságait a sík transzformációival vizsgáljuk, amelyekkel nem tudjuk a térbeli alakzatok tulajdonságait vizsgálni. A sík transzformációit feltétlen ki kell építeni, hogy a síkbeli alakzatok sokoldalú tulajdonságait megismerjük, és ebből következtethessünk a térbeli alakzatok egyes tulajdonságaira is. Az egységes tárgyalásról csak ilyen értelemben beszélhetünk, olyan értelemben nem, hogy a tér tulajdonságait vizsgáljuk általános iskolában a tér ponthalmazához rendelt transzformációcsoporttal, és ennek speciális eseteként tekintjük a síkgeometriát. Az egységes tárgyalás elvének hangoztatását nem szabad túlhangsúlyozni, csak olyan szerepet tulajdoníthatunk neki, amilyennel a jelenlegi tankönyvekben találkozunk.

Dolgozatomban csak a geometriai transzformációk felépítésével foglalkozom, nem az általános iskolai geometriaanyag tárgyalásával. A geometriai transzformáción kívül csak azoknak a fogalmaknak a kialakítására gondolok, amelyekre a transzformációknál szükségünk van.

A geometriai transzformációk tanításáról az általános iskola alsó tagozatában.

A bevezetőben már szóltunk róla, hogy az új, átdolgozott tanterv tovább tökéletesíti a transzformációk általános iskolai felépítését. Ennek tárgyalása azonban csak akkor lesz eredményes a felső tagozatban, ha az alsó tagozatban megfelelően előkészítjük.

A következőkben a geometriai transzformációk alsó tagozatos előkészítésével kapcsolatos elképzeléseinket vetjük papírra. Ezt abban a reményben tesszük, hogy az alsó tagozatos nevelőkben gondolatokat ébresztenek, ötleteket adnak a tartalmi és módszertani munkához.

Ne úgy nézzék tehát a leírtakat, hogy ezzel egy kész, teljes anyag birtokába kerülnek, hanem úgy, hogy ezzel segíteni kívánjuk az eredményesebb felkészülésüket.

Kialakítandó fogalmak:

- pont, egyenes, sík, illeszkedés, elválasztás közte van,
- metszés, szakasz, félegyenes, félsík, szög,
- hozzárendelés, fedésbe hozható, egybevágó,
- síkbeli alakzatok; háromszög, négyszög, sokszög,
- négyzet, téglalap, átló,
- térbeli alakzatok: kocka, hasáb, henger, gúla, kúp, cs.kúp,
- kerület, terület.

A geometriával kapcsolatos fogalmak kialakítása többféleképpen történhet. A pedagógus felkészültsége, a tanulóanyag, a tanulók környezete meghatározó tényező. A tankönyvek, feladatlapok, folyóiratok, kézikönyvek, különböző írások elsősorban tanácsokat, ötleteket adnak, gondolat-ébresztő megjegyzéseket tartalmaznak, amelyeket a pedagógus saját egyéniségéhez, felkészültségéhez és a tanulóanyaghoz alakít.

A tanulók a környezetükben, a mindennapi valóságban létező tárgyakat, természetes és mesterséges alakzatokat látnak, tapintanak, tapasztalnak. A geometria ezek modelljét készíti el, és a modellt vizsgálja. Ki kell tehát alakítani a valóságról készíthető modellek-beli jártasságot, a valóság modellizálását, a modellekről a valóság felismerését.
Talán az a helyes, ha párhuzamosan ismerkedünk a valósággal és a modellel. Ismerjük fel a modellen a házat, autót, órát, képet, sátort stb-t! Sétánkon ismerkedjünk a valóság tárgyaival. Figyeljük meg a házakat, a házak oldalát (falát), a tetőt! Hogyan rajzolnánk le? Iskolában elkészíttetjük a modelljeiket. Rajzoljuk le a házat! A geometriát nem érdekli a kilincs, a cserép, az ablakrács, a szín. A legegyszerűbb modell érdekli. Így rajzoljuk meg! Rajzoljuk meg az oldalfalat, az ablakot, az ajtót! Vegyük észre, hogy ezek modellje ugyanolyan. Ezeket négyszögeknek nevezzük. Rajzoljuk le a hegyes tetőket, sátrat. Ezek neve háromszög. Megmondjuk, hogy az egyik fajta rajzot síkbelinek, a másikat tériesnek, térhatásúnak, térbelinek nevezzük. Ismerjük meg a térbeli rajzokat! Minek a modelljei ezek a rajzok? Bögre, doboz, henger-kályhacső, villanypózna, oszlop, gerenda, kocka, sátor, süveg, tölcsér, csésze, pohár, gyárkémény. Figyeljük meg! Van köztük szögletes és nem szögletes (görbelapu). Csoportosítsuk! Adjunk nevet ezeknek! Hasáb, henger, gúla, csonkagúla, kúp, csonkakúp. Figyeljük meg otthon a tárgyakat! Nevezzük őket a geometria nyelvén! Modellünk igen keveset tartalmaz. Ezek köre bővíthető! Gyűjtsünk olyanokat, amelyről térbeli rajz készíthető!

Ismerkedjünk a síklap-gyűjteményünkkel. Válasszuk külön azokat, amelyeket vonalzó mellett meg tudunk rajzolni. Válasszuk külön azokat, amelyek megrajzolásánál háromszor-, négyszer-, többször kell elforgatni a vonalzót. Adjunk nevet ezeknek! (Háromszög, négyszög, stb.) Keressünk olyan alakzatot, amelyet nem tudunk vonalzó mellett megrajzolni (pl. a kör).

A vonalzó mellett megrajzolható vonalat egyenes vonalnak (egyenesnek) mondjuk. A többi vonalat nevezzük el görbe vonalnak. Rajzoljunk ilyeneket!

Rajzoljunk két pontot (A,B)! Kössük össze egyenes vonaldarabbal és görbe vonaldarabbal! Vegyük észre, hogy *két pont egy egyenes vonallal köthető össze.*

Hosszabbítsuk meg az AB egyenes vonaldarabot a B oldalon bármeddig. Ezt *AB félegyenesnek* mondjuk. A a kezdőpont.

Az AB félegyenest az A oldalon is hosszabbítsuk meg, amig rajzolni tudunk. Ezt *AB egyenesnek* nevezzük. Az AB részt *szakasznak* mondjuk. Tegyünk (illesszünk) pontokat az egyenesre. Mennyit tudunk? *Az egyenesre végtelen sok pont illeszkedik.*

Egy egyenesre A, B, C három pontot illesszünk! Azt mondjuk, hogy B az A és C között van, vagyis *B elválasztja az A és C pontokat.*

Rajzoljunk szakaszokat. Mérjük meg ezeket. A mérőszámot írjuk mellé. *A szakaszokhoz számokat rendeltünk.* Vegyük észre, hogy más mérőegységekkel más számok rendelhetők a szakaszokhoz. Érdemes tehát mérőegységet választani.

A füzetlapot, könyvlapot, papírlapot, ... síklapnak mondjuk. Képzeljük el ezeket minden irányban a "végtelenségig" meghosszabbítva. Ezt a nagy "lapot" *síknak* nevezzük el.

Rajzoljunk a füzetünkben egy pontot. A ponton át rajzoljunk egyeneseket. Hányat tudunk? *A síkben egy pontra végtelen sok egyenes illeszkedik.*

Rajzoljunk a füzetünkben egy egyenest. Ez a füzetlapot, a síkot két részre osztja. Az egyenest és az egyik részt *félsíknek* nevezzük. Az egyenes a síkot két félsíkra osztja. Rajzoljunk olyan két pontot, amelyik egy félsíkban van. Rajzoljunk olyant, amely különböző félsíkokban van. Rajzoljunk olyant, amely az egyenesre (határegyenesre) illeszkedik. Kössük össze a két pontot. Mondjunk igaz állításokat a két pont összekötő szakaszáról.

Tekintsük a füzetlapot egy síknak. Mutassunk pontokat, amelyek nem illeszkednek a síkra. A síkot és a felette (vagy alatta) lévő részt (pontok halmazát, ponthalmazt) *féltérnek* nevezzük. Egy sík két félteret határoz meg. Helyezzünk el két pontot úgy, hogy egyik féltérben legyen, különböző félterekben legyen, mindkét féltérben legyen. Mit tudunk mondani a két pont összekötő szakaszáról?

Három ujjunk hegye legyen három pont. Helyezzük rá a füzetet. A füzet most síkot helyettesít. Próbáljuk meg két ujjunkra helyezni. Helyezzük négy ujjunk hegyére. Előfordulhat, hogy a negyedik nem ér hozzá? Tapasztalat: *három pontra egy sík illeszthető.* Kettő pontra több sík helyezhető. *Van olyan négy pont, amelyre sík nem illeszthető.*

Rajzoljunk olyan két egyenest (egyenespárt), amelynek egy közös pontja van (amelyek metszik egymást). Szögestáblán is mutassunk ilyet. Tudunk-e olyan egyenespárt mutatni, amelyek nem metszik egymást, bármeddig meghosszabbítanánk (szögestáblán, négyzetrácsos papiron)? Ezeket *párhuzamosok*nak nevezzük. Előre elkészített metsző egyenespárra és párhuzamos egyenespárra helyezzünk síkot.

Rajzoljunk egy pontot a füzetben. A pontból kiindulva húzzunk két különböző félegyenest. Szögestáblán is állítsunk elő ilyen alakzatokat. Ezeket *szögnek* nevezzük. Adjunk nevet ezeknek.

A síkbeli és térbeli modellkészletünkön mutassunk szakaszokat, szögeket.

Ismerkedjünk meg alaposabban a négyszögekkel. A modellekből válogassuk ki és rajzoljunk is ilyeneket. Hol találkozunk ilyenekkel a valóságban? Mondjunk példákat. Adjunk nevet ezeknek (téglalap, négyzet, paralelogramma, deltoid, trapéz). Mondjunk, keressünk jellemzőket, tulajdonságokat.

A modellkészletünkből válogassuk ki a háromszögeket. Állitsunk elő ilyeneket (szögestáblán, füzetben). Hol találunk ilyeneket a valóságos tárgyakon? Csoportosítsuk a háromszögeket. Adjunk nevet mindegyiknek. Válasszunk ki két olyan háromszöget, amelynek "méretei" egyenlők. Helyezzük ezeket egymásra. Azokat a háromszögeket, amelyek egymásra fektetve fedik egymást, *egybevágó* háromszögeknek nevezzük. Keressünk a különböző tárgyakon ilyeneket. Mondjunk, csináljunk, gondoljunk ki egybevágó háromszögeket.

Ismerkedjünk a *körrel*. Pl. egy 2 Ft-ost rajzoljunk körbe. Válogassunk a modellkészletből ilyeneket. Keressünk a körmodellnek megfelelő alakzatokat a valóságos tárgyakon. Középpont, körvonal, húr.

Összefoglaláskor, ismétléskor sokoldalúan állíthatjuk össze eddigi tapasztalatainkat.

- Hol találkozunk a valóságban
  - a. egyenes vonaldarabokkal (szakaszokkal); (ház, tervrajz, ...);
  - b. párhuzamosokkal; (szoba, sínpár, ...);
  - c. pontokkal; (sarkok, csucsok, ...);
  - d. síkrészekkel; (fal, tábla, síkidomok, ...);
  - e. szögekkel?

Alakuljon ki, hogy a valóságos tárgyakon és azok geometriai modelljein ezek mindig előfordulnak.

- Rajzoljunk egy pontot, két pontot, egy egyenest, egy metsző egyenespárt, egy párhuzamos egyenespárt, egy síkot, egy pontból kiinduló félegyenespárt. Mondjunk ezekre igaz állításokat.

- Mondjuk el, milyen síkbeli alakzatokból épül fel egy-egy előttünk álló térbeli modell.
- Mondjunk valamit ezeknek a síkbeli alakzatoknak a tulajdonságairól.

Hozzárendelés, geometriai transzformációk

1. Keresd a szabályt!

□	○
3	7
5	11
8	17

$\square \longrightarrow (\square \cdot 2)+1$

$\bigcirc = (\square \cdot 2)+1$

□ : számok halmaza

○ : számok halmaza

A két halmazt egymáshoz rendeltük. A □ számhalmazhoz hozzárendeltük a ○ számhalmazt a következő *előírás* szerint: a □ -hez tartozó számokat szorozzuk meg 2-vel, és adjunk hozzá egyet.

Figyeljük meg: a □ különböző számaihoz különböző számokat rendeltünk az előírás (szabály) szerint!

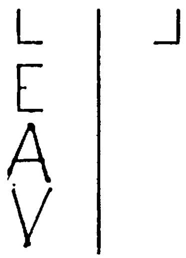
2. Az egyik halmazban síkidomok találhatók, a másikban számok. A két halmazt rendeljük egymáshoz a következő előírás szerint: minden síkidomhoz rendeljük hozzá a kerületét.

   rajzoljunk még síkidomokat, és írjunk hozzá méreteket! Keressük a hozzárendelt számokat! Figyeljük meg! Különböző síkidomokhoz ugyanazok a számok is tartozhatnak! Adjunk meg ilyen méreteket!

3. Gondoljunk a téglalapok és négyzetek halmazára! Rendeljünk mindegyikhez egy számot, a területét!
   Írjuk be a T halmazba a számokat!
   Adjunk meg önállóan adatokat! Figyeljük meg: Különböző alakzatokhoz különböző számok tartoznak mindig?

4. Síktükör előtt állunk. Figyeljük a képünket!

5.

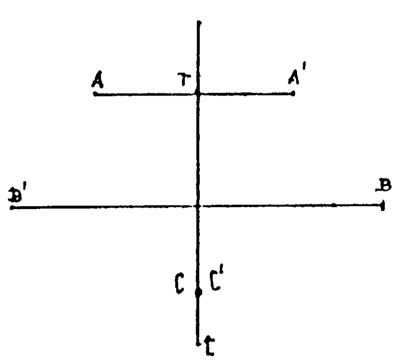


Rendeljük hozzá a tükörképét!
Mi az, hogy tükörkép?
Tükör segítségével mondd el!
Ellenőrizzük a rajzot tükörrel!
Figyeljük meg, a síkban a tükröt a tükör és síklap vonala helyettesíti!

6. Szögestáblán mozgassunk egy pontot! A tükröt egyenesvonal helyettesítse. Hol lesznek a különböző pontok képei?

Összegezés. Példáinkban a számok halmazához hozzárendeltünk számok halmazát, síkidomokhoz a kerületét illetve a területét, alakzatok ponthalmazához a tükörképeik ponthalmazát.
Ezután alaposabban megismerkedünk a tükrözéssel. Tanulmányaink során sokat fogjuk használni alakzatok tulajdonságainak a megállapításánál.

A sík pontjainak halmazát egy egyenes két félsíkra osztja. Az egyenest nevezzük el tengelynek. Az egyik félsík pontjaihoz rendeljük hozzá a másik félsík pontjait



képpontokként a következő előírás szerint: *a pontból húzzunk merőleges egyenest a tengelyre, a pont és a tengelyen lévő metszéspont távolságát mérjük fel a metszésponttól az egyenes másik félsíkben lévő részére. (AT = TA') Így kapjuk meg az A pont A' képét.* Az A pontot eredeti pontnak, az A' pontot képpontnak mondjuk, a *leképezést tengelyes tükrözésnek nevezzük.*

Gondolkozz és válaszolj! Próbáld ki, rajzold le!

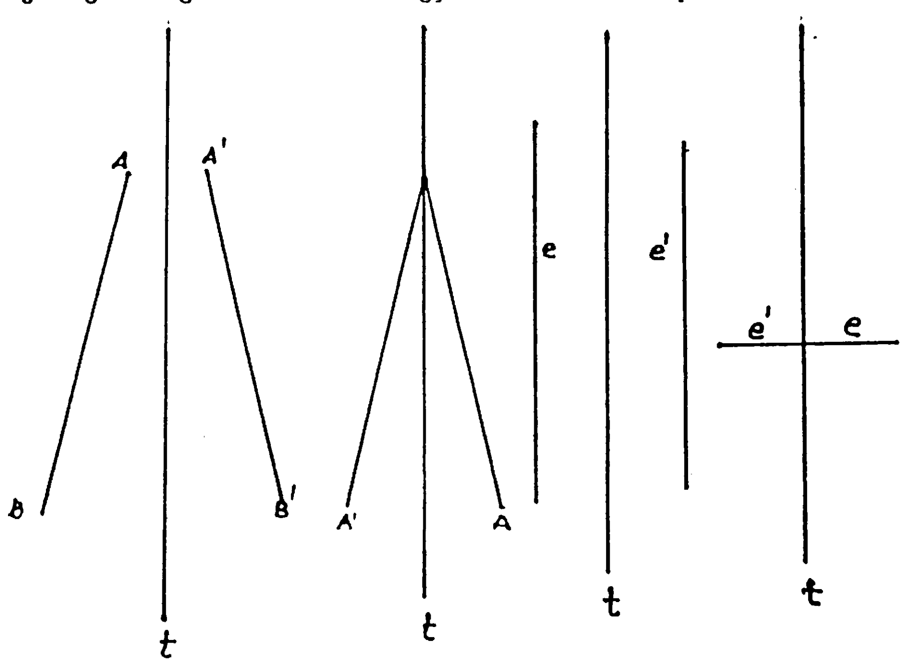
- A pont bármelyik félsíkban lehet. Hol van a képpont?
  (Az ellenkező félsíkban.)
- A pont a tengelyen van. Hol van a képpont?
  (Az eredeti pont és képpont egybeesik.)

Fogalmazzuk meg ezeket a tulajdonságokat!

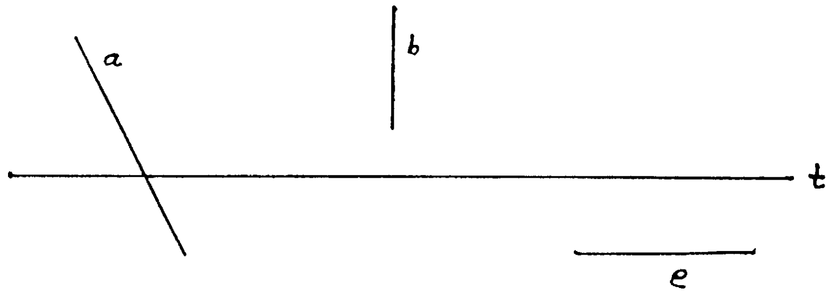
1. A tengelyes tükrözés a félsíkokat felcseréli.
2. A tengely pontjainak képe önmaga. A tengely pontjai fixpontok.

Vizsgáljuk meg ezután az *egyenesek* tükörképeit! Tudjuk, hogy az egyenest két pontja meghatározza. Az egyenes tükörképét két pontjának tükörképével határozhatjuk meg.

Rajzoljuk meg a következő egyenesek tükörképeit!

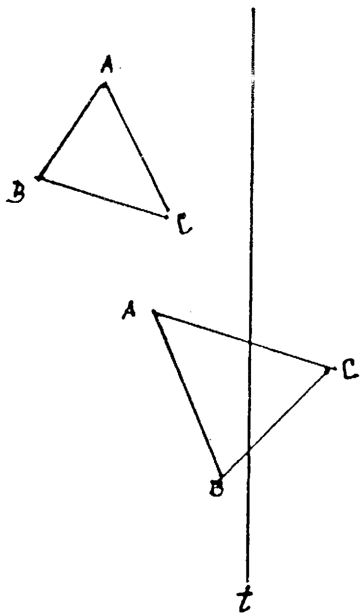


A rajzolt egyenesek felfoghatók úgy mint szakaszok. Ezzel a szakaszok tükörképeinek szerkesztését is megtanultuk.
Egy papírlapra rajzoljunk egy tengelyt, és a rajzon látható módon rajzoljunk egyeneseket (szakaszokat)! Rajzoljuk meg ezek tükörképeit!

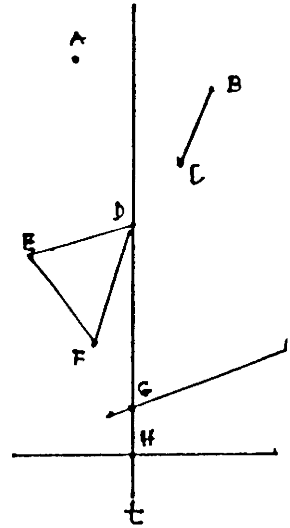


A tengely mentén hajtsuk össze a papírlapot! Mit tapasztalunk? (Az eredeti és a kép fedi egymást.)

Szerkesszük meg a következő ábrán látható háromszögek tükörképeit! Figyeljük meg a háromszögek körüljárását! Ellenőrizzük az eredeti- és képháromszögek oldalainak és szögeinek nagyságát! Mit tapasztalunk?
(Az eredeti és képháromszög körüljárása ellenkező, a megfelelő oldalak egyenlők, a megfelelő szögek egyenlők.)



Rajzoljuk meg a következő alakzatok tükörképét!



Az előző ábrához mondjunk igaz állításokat!

- Minden pontnak egy párja van.
- Különböző pontok képe különböző.
- BB' ∥ CC'.
- Tengelyre merőleges egyenes képe önmaga.
- $\overline{BC} = \overline{B'C'}$.
- EGF = E'G'F' .
- Tengelyen lévő pont képe önmaga.
- Pont és képe különböző félsíkban van.
- Ha A párja A', akkor A' párja A.
- A pont és kép távolságát a tengely felezi.
- A tükrözés a félsíkokat felcseréli.

A gyakorló feladatok között különböző helyzetű síkidomokhoz keressünk tükörtengelyeket. Döntsük el különböző síkidompárokról, hogy tükörképeik e egymásnak vagy nem! Mutassunk be különböző tükrös alakzatokat, és ezeken keressük meg a tükörtengelyeket!

CSERVENYÁK JÁNOS

EGY KÖZÉPISKOLAI GEOMETRIAOKTATÁSI KISÉRLETRŐL III. RÉSZ

ABSTRAKTO: *(Pri eksperimento de mezlerneja geometrioinstruado. III-a parto).*

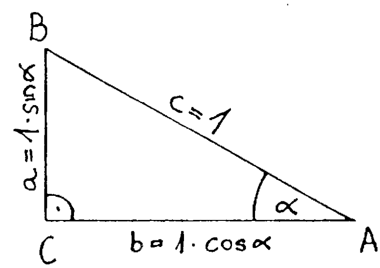
Tiu ĉi laboraĵo estas prezentado de tiu eksperimento, kiu rolas en la titolo de teksto pri mezlerneja geometrio, kaj ĝi donas resuomon pri la parto de la studmaterio de la III-a klaso. Unue prezentas la skribaĵo tiun instrumateriojn, kiujn oni ellaboris dum la lernojaro.

Instrumaterioj: komparo inter la angulofunkcioj de la pintanguloj, ŝkalara produktado de vektoroj kaj praktikaj aplikadoj de tiuj. Plue estas en teksto la koordinatogeometrio de la linio, la cirklo, la elipto, hiperbolo kaj parabolo kaj iliaj praktikaj aplikadoj.

Duaparte-nature en la temo okazas intertempe metodaj kaj simpligataj provoj por tiu celo, ke la gelernantoj alpropriĝu plej efike kaj plej facile tiun priskribitan studmaterion.

Ebben a dolgozatban a III. osztályban tanított geometriai tananyagot, annak tanításának egy módját és a tanítás esetleges eredményeit szeretnénk megismertetni. A II. osztályban ismertettük a négy szögfüggvény értelmezését tetszőleges szögre, vizsgáltuk tulajdonságaikat, általam szerencsésnek tartott ábraösszességek segítségével vizsgáltuk kapcsolatukat. Külön figyelmet szenteltünk a negatív szögek, az $\alpha^{o} \pm 180^{o}$-os, a $180^{o}-\alpha^{o}$-os, a $90^{o}-\alpha^{o}$-os szögek szögfüggvényeire, és a könnyebb tanulás és megjegyezhetőség érdekében kerestük a kapcsolatukat az egybevágósági transzformációkkal.

A III. osztály első tananyagrésze a hegyesszögek szögfüggvényei közötti kapcsolatok felismertetése volt.



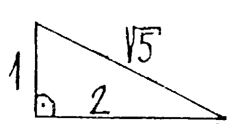
1. ábra

A $0^{o}<\alpha<90^{o}$ tartományban mindegyik szögfüggvényértéke pozitiv. Az 1. ábrán láthatók alapján a $\sin^{2}\alpha + \cos^{2}\alpha = 1$ összefüggés és a $tg\alpha$, valamint a $ctg\alpha$ értelmezése alapján hamar felismerték a tanulók, hogy bármelyik szög szögfüggvényének megadásával a szög további három szögfüggvényértéke meghatározható. Sőt érdekes volt tapasztalni azon felismerésüket is, hogy a szögfüggvényérték megoldásával (még ha irracionális is a szám, pl: $\frac{5}{2}$) a szögfüggvényértékhez tartozó szög megszerkeszthető is.

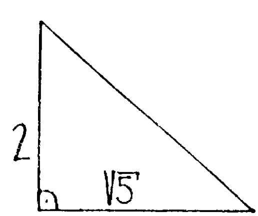
Pl.:

$tg\ \alpha = \frac{1}{2}$ $\quad$ $ctg\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\quad$ $\sin\alpha = \frac{2}{3}$

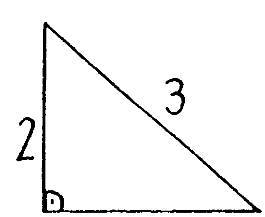
$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$



2. ábra



3. ábra



4. ábra

A következő anyagrész két szög összege, különbsége, adott szög kétszerese és fele szögfüggvényértékeinek meghatározása volt az adott szögek szögfüggvényértékeitől. Természetesen az értelmezéshez kapcsolódva az $\alpha + \beta$ szöghöz tartozó egységvektor koordinátáit határoztuk meg $\cos(\alpha + \beta)$ -t és $\sin(\alpha + \beta)$ -t, majd a már ismert összefüggések ismeretében a többi összegzési tételt is. A félszögek szögfüggvényeit azért emeltük ki méginkább, mert gyakorlati tapasztalatunk, hogy igen sok feladat megoldásában van rá szükség, s inkább a kiszámítás módját ajánlottuk megjegyezni a $\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1$; $\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha$ összefüggések összevonásaival.

A szögfüggvények transzformációi című anyagrész adott újabb alkalmat a geometriai transzformációk ismétlésére, összefoglalására. Innentől kezdve a szögeket radiánokban mértük.

Természetesen mindegyik szögfüggvény esetén elvégeztük az alábbi transzformációkat:

I. 1. $y = -f(x)$; x tengelyre való tükrözés;

2. $y = a \cdot f(x)$, "a" valós szám; y tengely irányú nyújtás; (ha $0<a<1$, "zsugorítás", ha $a>1$ nyújtás, ha $a<0$, akkor még x tengelyre vonatkozó tükrözés is);

3. $y = f(x)+b$; y tengely irányú eltolás; (ha $b>0$, akkor az y tengely pozitiv; ha $b<0$, akkor az y tengely negativ ága irányú az eltolás).

Az 1. és 2. esetében a fixpontokra ügyeltünk, míg a 3-ban a $b=0$ esetén az azonos leképezés fogalmát emeltük ki.

E három transzformációt *érték* vagy *függvénytranszformációnak* neveztük.

II. 1. $y = f(-x)$, y tengelyre való tükrözés;

2. $y = f(cx)$, "c" valós szám; x tengely irányú nyújtás; (ha $c>1$ "zsugorítás", ha $0<c<1$ nyújtás, az $x=0$ -hoz tartozó pont fixpont);

3. $y = f(x+m)$, x tengely irányú eltolás; (ha $m>0$ az x tengely negatív, ha $m<0$ az x tengely pozitív ága irányú az eltolás).

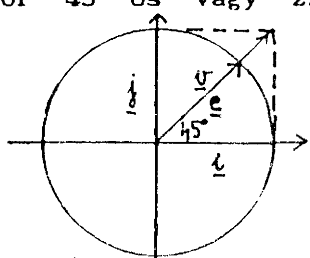
E három transzformációt *változó transzformációnak* hívtuk. Persze oldottunk meg kevésbé és igen bonyolult feladatokat is, az utóbbiakat a továbbtanulni készülőkkel főleg külön foglalkozásokon (pl.: szakkörön).

A trigonometrikus egyenletek megoldásában újat a vektorokkal való intenzívebb foglalkozás adott.

Álljon itt erre egy nagyon egyszerű példa.

Oldjuk meg a $\cos x - \sin x = 0$ egyenletet!

MEGOLDÁS: Legyenek az $\underline{e}$ egységvektor koordinátái $\cos x$ és $\sin x$. Az egyenlet szerint $\cos x = \sin x$, vagyis $\underline{e}$ egyállású a $\underline{v} = a(\underline{i}+\underline{j})$ vektorral (ahol "a" tetszőleges), hiszen a $\underline{v}$ vektor az $\underline{i}$ és $\underline{j}$ egységvektorok által meghatározott szög felezőjére (rombusz-négyzet) illeszkedik. Tehát az $\underline{e}$ vektor az $\underline{i}$ vektor 45°-os vagy 225°-os elforgatásával áll elő,



5. ábra

vagyis

$x_1 = \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi$, vagy

$x_2 = \frac{5\pi}{4} + k\cdot 2\pi$, ahol $k \in Z$.

Mivel $\frac{5\pi}{4} + k\cdot 2\pi = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4} + k\cdot 2\pi = \frac{\pi}{4} + \pi(2k+1)$, és mivel 2k páros, 2k+1 páratlan egész, a kétfajta gyök együtt írva $x = \frac{\pi}{4} + l\pi$, ahol $l \in Z$.

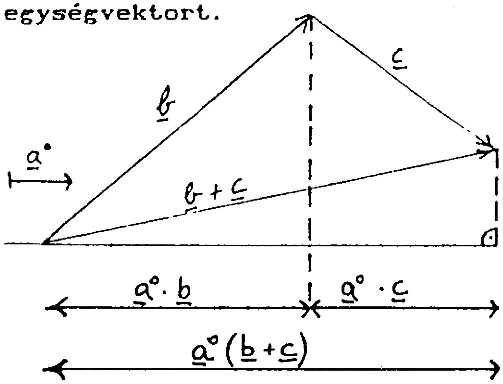
Feladatokat hagyományos úton is oldottunk meg.

Nagy figyelmet szenteltünk a feladatok megoldása után az ellenőrzésre, illetve az állásfoglalásra abban az értelemben, hogy a kapott eredmények valóban megoldásai a feladatoknak.
Oldottunk meg persze trigonometrikus egyenletrendszereket is, az összefüggések alkalmazására pedig igazoltunk trigonometrikus azonosságokat is.
A cosinustétel valamint a koordinátageometriában az egyenesek kölcsönös helyzetének meghatározása igényelheti két vektor skaláris szorzatának fogalmát.

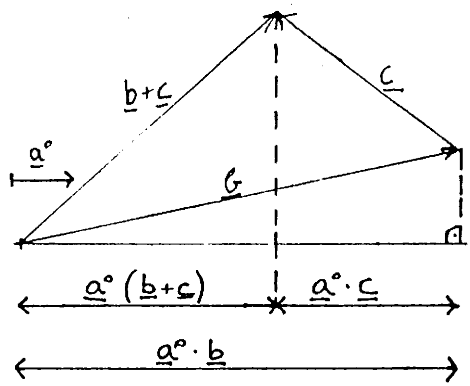
DEFINICIÓ: Két vektor skaláris szorzatán a két vektor hosszának és a körbezárt szögük cosinusának szorzatát értettük. Jele pl.: $\underline{a}\cdot\underline{b}$ ami az $|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\cos\alpha$ -val egyenlő, s mivel mindhárom tényező valós szám $\underline{a}\cdot\underline{b}$ is az.
Ha a két vektor közül az egyik $\underline{0}$, a szögük, így cosinusa sem egyértelmű, a skaláris szorzat mégis egyértelmű, mégpedig nulla. Bebizonyítottuk tulajdonságait, s néhány megjegyzést tettünk:

1. $\underline{a}\cdot\underline{b} = \underline{b}\cdot\underline{a}$, (kommutativ);
2. $\lambda\underline{a}$ esetén $(\lambda\underline{a})\cdot\underline{b} = \lambda(\underline{a}\cdot\underline{b})$;
3. $\underline{a}(\underline{b}+\underline{c}) = \underline{a}\cdot\underline{b} + \underline{a}\cdot\underline{c}$ (disztributiv);

Ennek bizonyítását is megmutattuk kétféle felvétel esetén is.
Tekintettük az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$, valamint az $\underline{a}$ irányába eső $\underline{a}^0$ egységvektort.



6. ábra



7. ábra

Nyilvánvaló, hogy - mint az ábra is mutatja - pl: az $\underline{a}^o\cdot\underline{b}$, a $\underline{b}$ vektor $\underline{a}$ vagy $\underline{a}^o$ vektor irányába eső merőleges vetületének hosszaként is felfogható.

Igy az ábráról

$$\underline{a}^o\cdot(\underline{b}+\underline{c}) = \underline{a}^o\cdot\underline{b} + \underline{a}^o\cdot\underline{c}$$ adódott.

Ha az egyenlőséget $|\underline{a}|>0$ számmal megszoroztuk, az

$$|\underline{a}|\cdot\underline{a}^o\cdot(\underline{b}+\underline{c}) = |\underline{a}|\cdot\underline{a}^o\cdot\underline{b} + |\underline{a}|\cdot\underline{a}^o\cdot\underline{c}$$ egyenlőséget

kaptuk, ami az $|\underline{a}|\cdot\underline{a}^o = \underline{a}$ miatt az

$$\underline{a}\cdot(\underline{b}+\underline{c}) = \underline{a}\cdot\underline{b} + \underline{a}\cdot\underline{c}$$ bizonyítandó

állítást jelentette.

A skaláris szorzás kommutatív tulajdonsága miatt

$$(\underline{b}+\underline{c})\cdot\underline{a} = \underline{b}\cdot\underline{a} + \underline{c}\cdot\underline{a}$$ is fennáll.

Megjegyzés: Az eljárás ismétlésével belátható, az

$$(\underline{a}_1+\underline{a}_2+\underline{a}_3+ \dots +\underline{a}_n)\cdot\underline{b} = \underline{a}_1\cdot\underline{b}+\underline{a}_2\cdot\underline{b}+ \dots +\underline{a}_n\cdot\underline{b}$$

összefüggés is.

A későbbiek érdekében még megjegyeztük, hogy ha $\underline{a}\neq\underline{0}$ és $\underline{b}\neq\underline{0}$ akkor $\underline{a}\cdot\underline{b}>0$, ha szögük (α) $0^o \leq \alpha < 90^o$, $\underline{a}\cdot\underline{b} = 0$ ha $\alpha=90^o$ és $\underline{a}\cdot\underline{b} < 0$, ha $90^o < \alpha \leq 180^o$.

Egyébként $\underline{a}\cdot\underline{b}=0$ akkor, ha valamelyik vektor $\underline{0}$ vagy $\alpha=90^o$.

Két nem nullvektor esetén tehát $\underline{a}\cdot\underline{b}$ akkor és csak akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra.

Továbbá $\underline{a}\cdot\underline{a} = |\underline{a}|^2$ és $|\underline{a}| \geq 0$;

$$(\underline{a}+\underline{b})\cdot(\underline{a}+\underline{b}) = \underline{a}^2+2\underline{a}\underline{b}+\underline{b}^2 ;$$

$$(\underline{a}-\underline{b})\cdot(\underline{a}-\underline{b}) = \underline{a}^2-2\underline{a}\underline{b}+\underline{b}^2 .$$

Mivel skaláris szorzatnál két tényezővektorról van szó, ezért asszocivitásról szó sem lehet.

Nem értelmezhetők 2-nél magasabbfokú hatványai sem.

Ez utóbbiak is inkább a továbbtanulók kedvéért kerültek belátásra.

Ezután mivel $\underline{i}^2=\underline{j}^2=1$ és $\underline{i}\cdot\underline{j}=0$,

két vektor skaláris szorzatát megfelelő koordinátáik szorzatösszegeként, egy vektor önmagával alkotott skalárszorzatát koordinátái négyzetösszegeként nyertük, hosszát pedig gyökvonással.

$$\underline{a}\cdot\underline{b} = x_1x_2+y_1y_2;$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad \text{és} \quad |\underline{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\,.$$

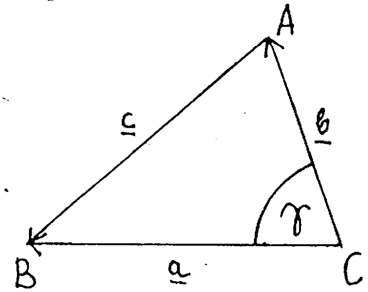
A skalárszorzatból így lehetett könnyen nyerni két vektor szögét. Ha $\underline{a}_1\ (x_1;y_1)$ és $\underline{a}_2\ (x_2;y_2)$, szögük α, akkor az

$$\underline{a}_1\cdot\underline{a}_2 = |\underline{a}_1|\cdot|\underline{a}_2|\cdot\cos\alpha \text{ -ból}$$

$$\cos\alpha = \frac{\underline{a}_1\cdot\underline{a}_2}{|\underline{a}_1|\cdot|\underline{a}_2|}\,,$$

másképpen $\cos\alpha = \dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$, s táblázattal a szög nyerhető.

Természetesen két egyenes szögét irányvektoraik szögéből nyerhettük. A cosinustétel az ábra alapján és vektorok önmagukkal alkotott skalárszorzatából adódik:



8. ábra

$\underline{c} = \underline{a}-\underline{b}$

$\underline{c}^2 = \underline{a}^2-2\underline{a}\underline{b}+\underline{b}^2$; s ha

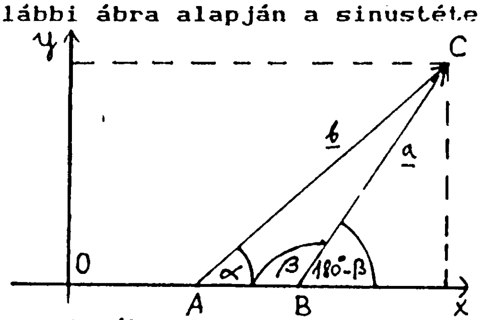
$\underline{a}^2=|\underline{a}|^2=a^2$; $\underline{b}^2=|\underline{b}|^2=b^2$,

$|\underline{a}|= a$, $|\underline{b}|= b$, akkor

$c^2= a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$.

A γ -ról az előbb elmondottak miatt már fölösleges szólni.

Az alábbi ábra alapján a sinustétel is igen könnyen adódott.



9. ábra

Az AC második koordinátája $|\underline{b}|\cdot\sin\alpha$,

A BC második koordinátája $|\underline{a}|\cdot\sin\beta$

De ezek egyenlők, és $|\underline{a}|=a$, $|\underline{b}|=b$ miatt $b\cdot\sin\alpha = a\cdot\sin\beta$

vagyis $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, általánosabban $a:b:c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

A következő fejezet az analitikus geometria volt. E fejezetben a geometriai alakzatok pontjainak kölcsönösen egyértelmű módon rendezett számpárokat feleltettünk meg. A geometriai feladatok megoldása során algebrai fogalmakkal dolgoztunk, s a kapott eredményeket ismét a geometria nyelvén fogalmaztuk meg. Mivel a sík analitikus geometriájáról volt szó, alakzataink az egyenes, a kör, az ellipszis, a hiperbola és a parabola voltak. Ezek tulajdonságait, kölcsönös helyzeteit vizsgáltuk. A felsorolt alakzatoknak egyenleteket feleltettünk meg. Egy alakzat egyenletén olyan összefüggést értettünk, amelyet az alakzat pontjainak koordinátái elégítettek ki, más pontok koordinátái nem. Más szavakkal: az alakzat minden pontja kielégíti a szóbanforgó egyenletet, s ha egy pont koordinátái kielégítik az egyenletet, akkor ez a pont illeszkedik az alakzatra.

Persze mi a pontokat pontokhoz tartozó helyvektorokkal is megadtuk, így beszélhettünk a pontokból álló alakzat vektoregyenletéről is. A vektoregyenlet olyan összefüggés, amelyet az alakzat pontjainak helyvektorai kielégítettek, más pontok helyvektorai azonban nem. Az alakzat vektoregyenletében változóként szereplő helyvektort a futópont helyvektorának nevezzük. Az *egyenes* koordinátageometriáját az alábbi módon tárgyaltuk. Felírtuk egy adott $\underline{r}_0$ helyvektorú ponton átmenő adott $\underline{v}$ irányvektorú egyenes paraméteres vektoregyenletét:

$$\underline{v} = \underline{r}_0 + t\underline{v} \quad ; \quad t \text{ paraméter.}$$

Mivel ez két skalár egyenletet jelent, előállt az egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$x = x_0 + tv_1$$
$$y = y_0 + tv_2 \ .$$

A t-t kiiktatva $\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2}$ -höz jutva átrendezés után a

$v_2x-v_1y = v_2x_0-v_1y_0$ -hez, az ugynevezett paramétermentes egyenlethez jutottunk. (A $\underline{v}$ nem párhuzamos a tengely egyikével sem.) A $v_2=A$, $a-v_1=B$ és $v_2x_0-v_1y_0=C$ helyettesítés után az egyenes egyenlete $Ax+By=C$ alakban volt írható. Mivel $\underline{v}$-vel együtt $\lambda\underline{v}$ is irányvektora az egyenesnek, így egy egyenesnek végtelen sok egyenlete van.

Az x és y tengelyekkel párhuzamos egyenesek irányvektorait $(v_1;0)$ illetve $(0;v_2)$ jelentette, így az ezekkel párhuzamos egyenesek egyenletei amennyiben a $P_0(x_0;y_0)$ pontra illeszkednek

$$y = y_0 \quad \text{illetve} \quad x = x_0 .$$

A koordinátatengelyek egyenletei rendre $y = 0$, $x = 0$.

A P_1 és P_2 pontok helyvektorai pl.: $\underline{p}_2-\underline{p}_1$ helyvektorainak különbsége lehet e két pontra illeszkedő egyenes irányvektora, (amely pl.: a P_1-re illeszkedik a felírás szempontjából) így

$$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y = (y_2-y_1)x_1-(x_2-x_1)y_1$$

alakban, sőt átrendezve

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \cdot (x-x_1)$$

jól megjegyezhető alakban volt irható. Ez tehát két adott ponton átmenő egyenes egyenlete. Amikor az x tengely $P_1(a;0)$ és az y tengely $P_2(0;b)$ két pontján megy át az egyenes, akkor az un. tengelymetszetes alakhoz jutottunk:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Több feladat megoldásában előnyös az alkalmazása.

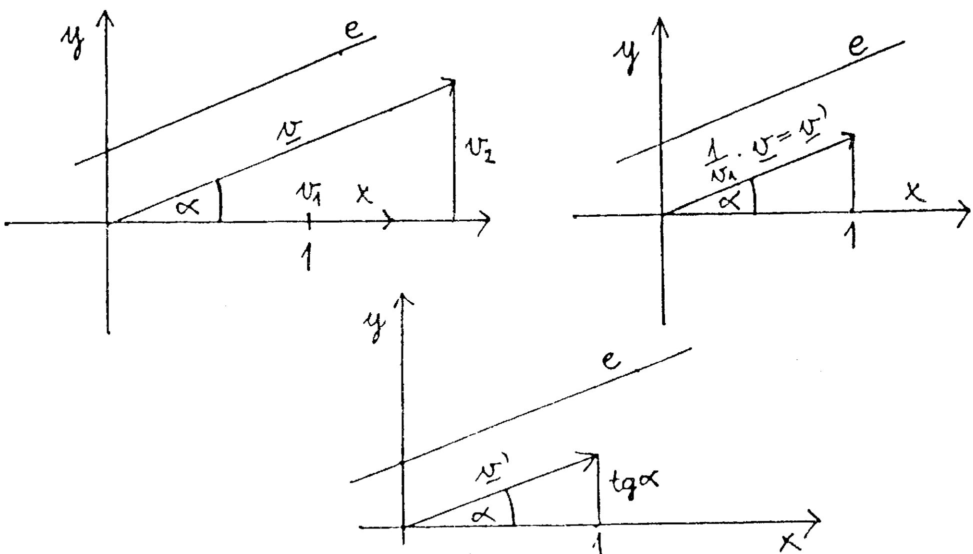
Amikor idáig jutottunk elméletben, utána konkrét feladatokon keresztül újra végiggondoltuk, végigcsináltuk, gyakoroltuk az egészet. Majd vektor 90^o-os elforgatottjának koordinátáit határoztuk meg azon az alapon, hogy $\cos(\alpha+90^o)=-\sin\alpha$ és
$\sin(\alpha+90^o)=\cos\alpha$.

Igy a $\underline{v}(\cos\alpha;\sin\alpha)$ + 90^o-os elforgatottja $\underline{v}^{*}(-\sin\alpha;\cos\alpha)$,
továbbá a $\underline{v}$ $-$ 90^o-os elforgatottja $\underline{v}^{**}(\sin\alpha;-\cos\alpha)$.

Ezek alapján aztán a normálvektor előállíthatósága alapján – az $\underline{n}(A;B)$ – az egyenes egyenlete $Ax+By=Ax_0+By_0$.
Két egyenes metszéspontját az egyenleteikből álló egyenletrendszer megoldásával határoztuk meg.
Igen fontos volt az egyenes és az elsőfokú függvény kapcsolatának vizsgálata, s beláttuk, hogy az $Ax+By=C$ egyenlet minden olyan esetben egyenes egyenlete, ha A és B egyszerre nem nullák. $A=B=C=0$ esetén a sík minden pontja kielégíti az egyenletet.
Könnyű volt kimutatni, hogy két egyenes akkor és csak akkor párhuzamos, ha az egyenesek irányvektorai megfelelő koordinátáinak hányadosa egymással egyenlő, és akkor és csak akkor merőleges, ha irányvektoraik megfelelő koordinátáinak szorzatösszege nulla. Ez utóbbi így is írható: $v_1v_1'+v_2v_2'=0$,

másképpen $\dfrac{v_2}{v_1}\cdot\dfrac{v_2'}{v_1'}=-1$.

Az egyenes iránytényezős alakja sok feladat megoldása szempontjából előnyös. Legyen $\underline{v}$ $(v_1;v_2)$ egy egyenes irányvektora.



10. ábra

Ehelyett az $\frac{1}{v_1}\cdot \underline{v} = \underline{v}'\left[1;\ \frac{v_2}{v_1}\right] = \underline{v}'\ (1;tg\alpha) = \underline{v}'\ (1;m)$ írható, ha $m=tg\alpha$ jelölést is bevezettük.

Az utóbbi irányvektorral felírt $P_1\ (x_1\ ;y_1\ )$ ponton átmenő egyenes egyenlete $mx-y = mx_1-y_1$, átrendezve

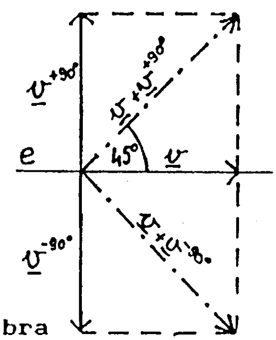
$$y-y_1 = m(x-x_1) ,$$

az adott ponton átmenő adott iránytényezőjű egyenes egyenlete. Ha a $P_1(0;b)$, akkor $y=mx+b$, az egyenes iránytényezős alakja. A korábban leírtak alapján annak szükséges és elégséges feltétele, hogy két egyenes egyállású illetve merőleges legyen

$$m_1=m_2 \qquad \text{illetve} \qquad m_1 = -\frac{1}{m_2} .$$

Gyakran fordult elő, hogy adott egyenessel 1. 45^o-os, 2. 30^o-os, 3. 60^o-os szöget bezáró egyenesek egyenletét, illetve 4. két egyenes szögfelezőinek egyenletét kellett felírni.

1. Az ábráról leolvasható, hogy a két egyenes



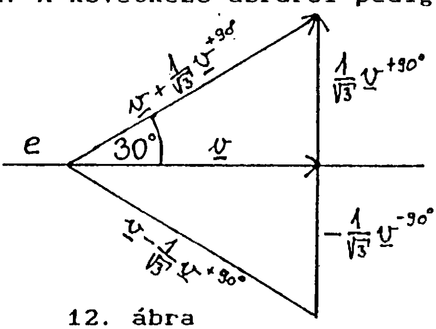
11. ábra

irányvektora a $\underline{v} + \underline{v}^{+90^o}$,

illetve a $\underline{v} + \underline{v}^{-90^o}$;

ahol $\underline{v}$ az egyenes irányvektora.

2. A következő ábráról pedig, hogy a két egyenes irányvektora



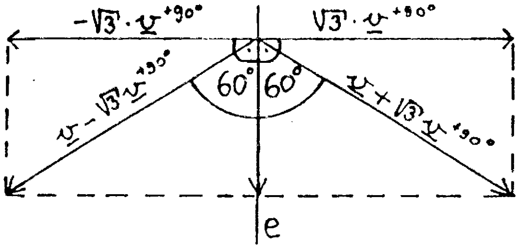
12. ábra

$\underline{v} + \frac{1}{\sqrt{3}}\ \underline{v}^{+90^o}$, illetve

$\underline{v} - \frac{1}{\sqrt{3}}\ \underline{v}^{-90^o}$,

ahol $\underline{v}$ az egyenes irányvektora.

3. A két egyenes irányvektora:



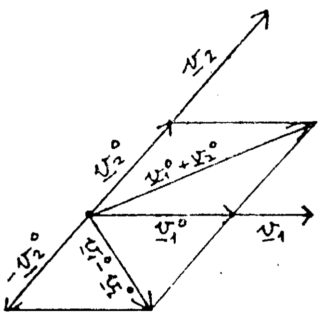
$\underline{v} - \sqrt{3}\ \underline{v}^{+90°}$

$\underline{v} + \sqrt{3}\ \underline{v}^{+90°}$

ahol $\underline{v}$ az egyenes irányvektora.

13. ábra

4. A $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ irányvektorú metsző egyenespár szögfelezőinek irányvektorai



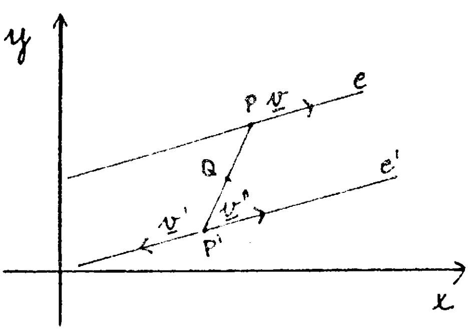
$\pm\left(\underline{v}_1^0 + \underline{v}_2^0\right)$,

$\pm\left(\underline{v}_1^0 - \underline{v}_2^0\right)$,

ahol $\underline{v}_1^0$ a $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2^0$ a $\underline{v}_2$ irányvektorokkal egyirányú egységvektorok (A rombusz átlói felezik a a rombusz szögeit).

14. ábra

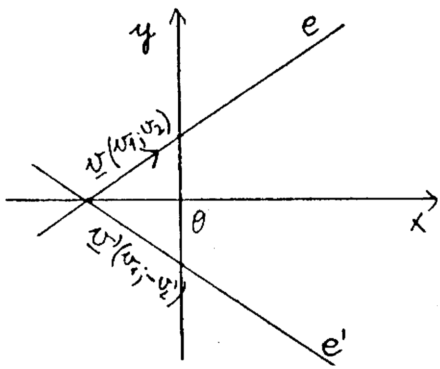
Vektorok segítségével egyenes pontra vonatkozó tükörképének irányvektora az eredeti irányvektorával egyállású.



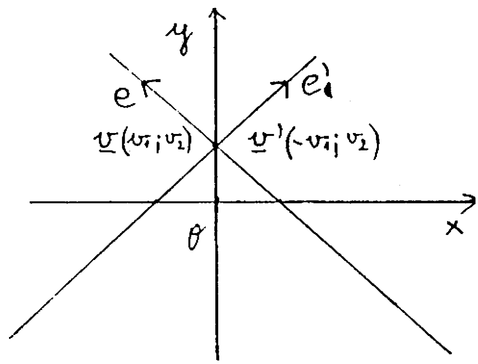
Tetszőleges $P \in e$ Q-ra vonatkozó tükörképén $\underline{e}$-vel párhuzamos egyenes tükörképét felirni egyszerű.

15. ábra

Az egyenes x és y tengelyre vonatkozó tükörzéskor a képegyenes irányvektora az ábra alapján megállapítható volt.

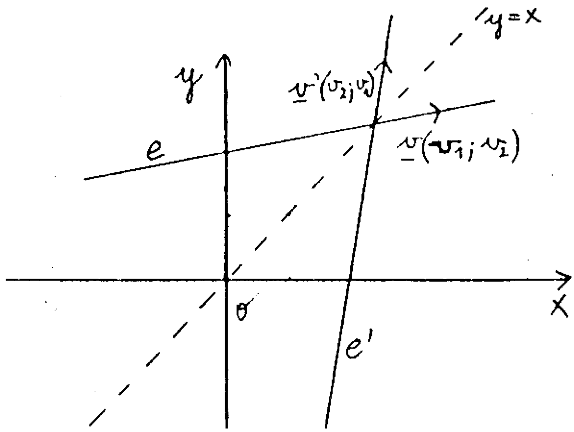


16. ábra



17. ábra

Az egyenes y=x tengelyre tükrözésekor a kép irányvektora pedig az alábbi ábráról olvasható le.



18. ábra

Ezek a felismerések nagyon felgyorsíthatják a szóbanforgó tulajdonságú egyenesek egyenletének felírását, ami a középiskolás tanulóknak a vektorokkal történő munkát szimpatikussá teheti.

Két egyenes irányvektorának ismeretében a két egyenes által bezárt szög a két vektor skalárszorzatából került meghatározásra

$$\cos\alpha = \frac{v_{11}\cdot v_{21} - v_{12}\cdot v_{22}}{\sqrt{v_{11}^2+v_{12}^2}\cdot\sqrt{v_{21}^2+v_{22}^2}}\text{, amitől}$$

$\cos\alpha = 0$ esetén $\alpha = 90^{o}$, $\cos\alpha > 0$ esetén α hegyesszög, $\cos\alpha < 0$ esetén α tompaszög.

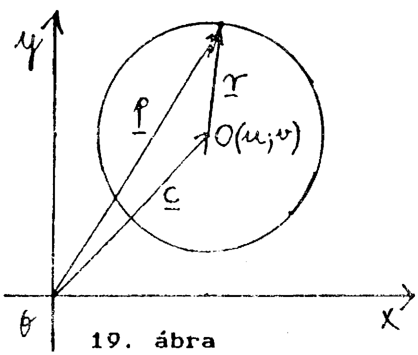
Pont és egyenes távolságán a pontból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hosszát értjük. Ezt úgy határoztuk meg, mint két pont távolságát (persze koordináták segítségével).

A kör, ellipszis, hiperbola és parabola koordinátageometriája

Először megadtuk mindegyiknek, mint mértani helynek a definícióját, és ezután határoztuk meg egyenletüket, jellemzőiket.

I.

a. A kör egyenlete



19. ábra

$\overrightarrow{CP} = \underline{p} - \underline{c}$

$|\overrightarrow{CP}| = |\underline{p} - \underline{c}| = r$

$\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2} = r$, másképpen

$(x-u)^2+(y-v)^2 = r^2$.

Ha $u=v=0$, akkor $x^2+y^2=r^2$ origó középpontú kör.

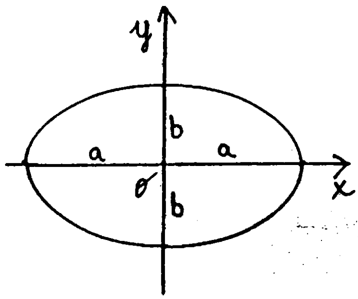
Kimutattuk, hogy az

$Ax^2+By^2+Cx+Dy+Exy+F=0$ akkor kör egyenlete, ha $A=B$, $E=0$, továbbá teljes négyzetté kiegészítés után

$(x-u)^2+(y-v)^2= s$ alakba írható; ahol u,v és s az A,C,D,E számokból áll elő és $s>0$. Ha $s=0$ csak az $(u;v)$ elégíti ki, ha $s<0$ akkor nincs az egyenletet kielégítő pont, tehát ekkor nem kör egyenletéről van szó.

b. Az olyan ellipszis egyenletét vezettük le, amelynek szimmetriaközéppontja az origó, tengelyei a koordinátatengelyre illeszkednek.

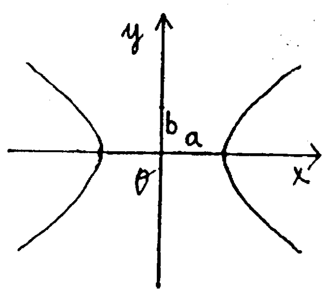
Egyenlete: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



20. ábra

c. Továbbá az olyan hiperbola egyenletét is levezettük, amelynek középpontja az origó, tengelyei a koordinátatengelyekre illeszkednek.

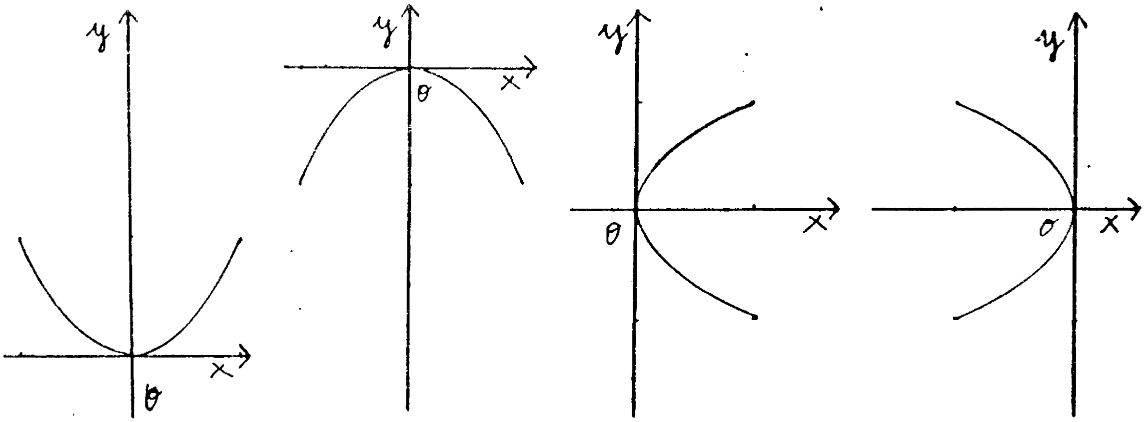
Egyenlete: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.



21. ábra

d. Végül olyan parabolák egyenleteit vezettük le, amelyek csúcsa az origó, szimmetriatengelyük pedig az x tengely pozitív és negatív ága, illetve az y tengely pozitív és negatív ága.

Egyenleteik rendre $y^2=2px$, $y^2=-2px$, $x^2=2py$, $x^2=-2py$.

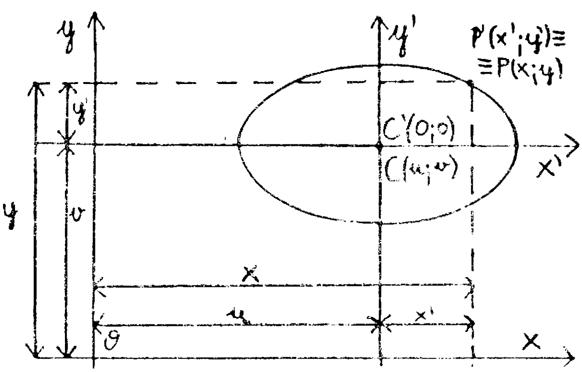


22. ábra

Ezek után koordinátatranszformációval elkészítettük a nem origó középpontú 1. ellipszis, 2. hiperbola egyenletét, amelynek tengelyei párhuzamosak a koordinátatengelyekkel, illetve 3. parabolák egyenletét, amelyek tengelyei párhuzamosak a koordinátatengelyek valamelyikével.

II.

1. A C(u;v) középpontú, x és y tengellyel párhuzamos 2a nagy-, és 2b kistengelyű ellipszis egyenlete.



23. ábra

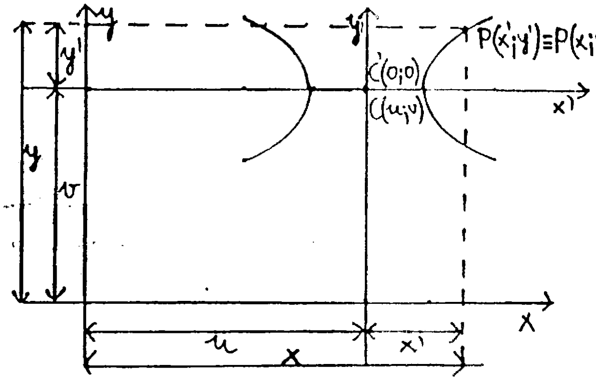
Az x';y' rendszerben az ellipszis origó középpontú egyenlete

$$\frac{x'}{a^2} + \frac{y'}{b^2} = 1$$

Az ábráról leolvasható, hogy $x'=x-u$, $y'=y-v$, amit az előbbi egyenletbe írva kaptuk az igért egyenletet:

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1 .$$

2. A $C(u;v)$ középpontú, x és y tengellyel párhuzamos 2a valós-; és 2b melléktengelyű hiperbola egyenlete.



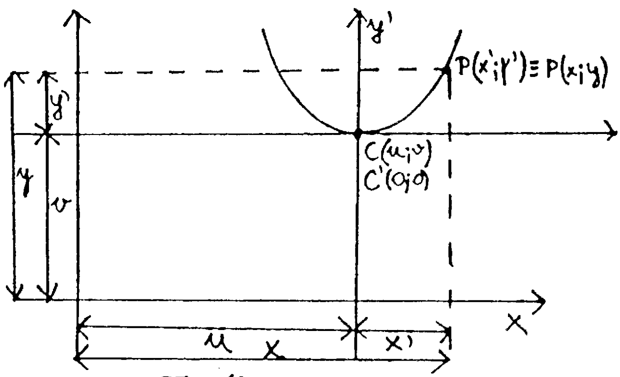
24. ábra

Mint előbb, az

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1 \text{ -hez}$$

jutunk.

3. A $C(u;v)$ tengelypontú y tengely pozitív ágával párhuzamos tengelyű parabola egyenlete.



25. ábra

Az $x'=x-u$ és $y'=y-v$ felhasználásával az $x'^2=2py'$ -ből $(x-u)^2=2p(y-v)$ adódik.

Hasonlóan kapjuk a további háromféle parabola egyenletét:

$(x-u)^2 = -2p(y-v)$,

$(y-v)^2 = 2p(x-u)$ és

$(y-v)^2 = -2p(x-u)$ alakban.

Ha az 1-3 egyenleteket átalakítottuk, másodfokú kétismeretlenes egyenletekhez jutottunk. Megfordítva: bizonyos feltételeknek eleget tevő másodfokú kétismeretlenes egyenletek ellipszist, hiperbolát, illetve parabolát határoztak meg.

Természetesen megvizsgáltuk egyenesek, körök, ellipszisek, hiperbolák, parabolák közül bármely kettőnek a kölcsönös helyzetét. Egyenleteikből egyenletrendszereket alkottunk, azok megoldásainak száma a két alakzat közös pontjainak számát adta. Érdekes volt két alakzat érintési problémáinak vizsgálata, hiszen ekkor másodfokú egyenletrendszert kellett megoldanunk a kérdések megválaszolásához, a másodfokú egyenlet diszkriminánsának előjelétől függően aztán levontuk a megfelelő tanulságokat.

Külön foglalkoztunk az origó középpontú hiperbola és az origón átmenő egyenes kölcsönös helyzetével.

Oldjuk meg tehát az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ és $y=mx$ egyenletekből álló egyenletrendszert pl. behelyettesítő módszerrel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{m^2x^2}{b^2} = 1 \ ,$$

$$x^2b^2 - a^2m^2 = a^2b^2 \ .$$

a/ Ha $b^2-a^2m^2 = 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása, ugyanis $x^2 \cdot 0 = a^2b^2$. Vagyis $b^2=a^2m^2$, amiből $|m|=\left|\frac{b}{a}\right|$, ekkor az origón átmenő egyenes és a hiperbola nem metszik egymást.

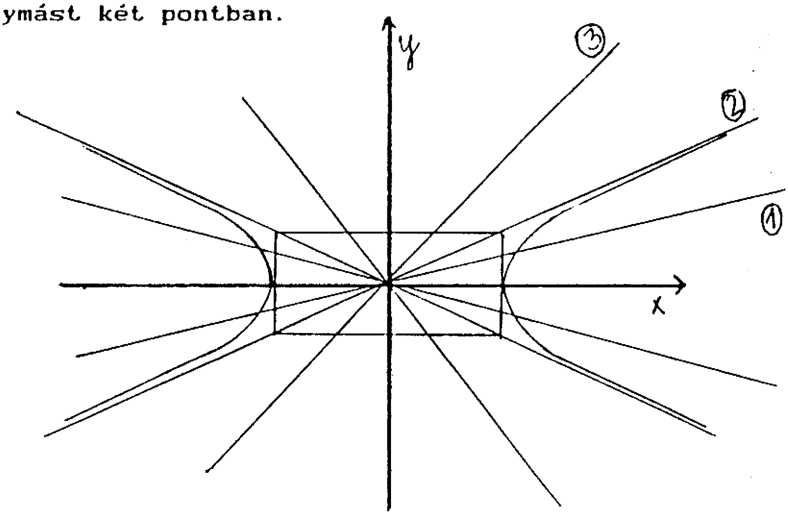
b/ Ha $b^2-a^2m^2 < 0$, akkor sincs megoldása. Vagyis ha $b^2<a^2m^2$, amiből $|m|>\left|\frac{b}{a}\right|$, az egyenes és a hiperbola nem metszik egymást.

c/ Ha $b^2-a^2m^2 > 0$ akkor a megoldások

$$x_1 = \frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2b^2}} \ ; \qquad y_1 = \frac{m \cdot ab}{\sqrt{b^2-a^2m^2}} \quad \text{és}$$

$$x_2 = -\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2b^2}} \ ; \qquad y_2 = -\frac{m \cdot ab}{\sqrt{b^2-a^2m^2}} \ ,$$

vagyis, ha $|m| < \left|\frac{b}{a}\right|$, az egyenes és a hiperbola metszik egymást két pontban.



26. ábra

A 2-es jelzésű egyenesek nem metszik a hiperbolát, az 1-esek metszik, a 3-asok ismét nem. A 2 jelűek az 1 és 3 jelűeket elválasztják, mondhatnánk hogy a 2 jelűek az első nem metszők, ezeket az aszimptotáknak nevezzük, amelyek a hiperbolát tetszőlegesen megközelítik, de el nem érik. Ezzel azért foglalkoztunk, mert ez az út is elvezethet a végtelen távoli elemek értelmezéséhez, amely a továbbtanulás szempontjából érdeklődésre tartott számot.

IRODALOM

[1] Az érvényben levő általános iskolai tanterv.

[2] Az érvényben levő középiskolai tanterv.

[3] A forgalomban levő általános iskolai tankönyvek.

[4] A forgalomban levő középiskolai tankönyvek.

[5] Dr. Hajós György: Bevezetés a geometriába.
Tankönyvkiadó, 1960.

[6] Dr. Pelle Béla: Geometria
Tankönyvkiadó, 1974.

[7] Dr. Cservenyák János: A geometria középiskolai szintű feldolgozása transzformációkkal és vektorokkal.
Egyetemi doktori disszertáció, 1977.

SASHALMINÉ KELEMEN ÉVA

A FŐISKOLAI GEOMETRIA ANYAG EGY LEHETSÉGES MEGALAPOZÁSA I. RÉSZ

ABSTRACT: *(One of the possible establishments of the academic geometrical subject. Part I.) In our college students study geometry according to the book written by Pelle Béla titled "The Geometry". In this setting up we initiate the coincidental transformation with the help of the reflectial axioms.*

In this article we begin to initiate an axiomscheme wich differs from the setting up of the book but also based on symmetry. After the disscussion of certain subjects the book is also avialable to practise the given subject.

The establishment prepared by employment and modicfication of G. Choquet's axiomscheme better relies on the theory of sets and the algebrical knowledge of the students.

Főiskolánkon a hallgatók dr. Pelle Béla: Geometria cimű tankönyve alapján tanulják a geometriát. Ebben a felépítésében az egybevágósági transzformációkat tükrözési axiómák segítségével vezetjük be.

Az 1989-90 -es tanévben egy hallgatói csoportnál az eredetitől eltérő, de ugyancsak a szimmetriát fölhasználó axiómarendszer alapján kezdtük el a geometria anyag fölépítését.

Ez a rendszer viszonylag kevés axiómát tartalmaz, s az egyszerüség kedvéért ezek nem mind függetlenek. (Az I. II. levezethető a többiből, s a VI. egzisztencia része bizonyítható).

A felépítés során az eddigieknél jobban támaszkodunk a hallgatók halmazelméleti, algebrai ismereteire. A rendszerben szereplő axiómák a következők:

İLLESZKEDÉSI AXIÓMÁK:

I. A tér, a sík, az egyenes végtelen ponthalmaz.

II. A tér tartalmaz legalább két különböző síkot, és minden sík tartalmaz legalább két különböző egyenest.

III. Az E tér bármely két különböző pontjára egy és csak egy egyenes illeszkedik.

IV. Ha egy egyenes két különböző pontja illeszkedik a síkra, akkor az egyenes minden pontja illeszkedik a síkra.

V. Az E tér tetszőleges, de nem kollineáris ponthármasára egy és csak egy sík illeszkedik.

VI. Tetszőleges α síkot, rá illeszkedő a egyenest és tetszőleges $P \in \alpha$, de $P \notin$ a pontot tekintve, a P pontra az α síknak egy és csak egy olyan egyenese illeszkedik, amely az a egyenessel párhuzamos.

RENDEZÉSI AXIÓMÁK:

VII. Minden egyenesen létezik két, egymással ellentétes rendezés.

VIII. Minden a,b párhuzamos egyenespár és tetszőleges, a-ra illeszkedő A,A' és b-re illeszkedő B,B' pontnégyes esetén, minden olyan, az a,b egyenespárral párhuzamos egyenes, mely metszi az A,B szakaszt, metszi az A',B' szakaszt is.

IX. Tetszőleges α sík esetén létezik az $E \setminus \alpha$ halmaznak két olyan E_1, E_2 végtelen részhalmazra történő felbontása úgy, hogy tetszőleges két térbeli pont akkor és csak akkor tartozik a két különböző részhalmazhoz, ha az általuk meghatározott szakasz metszi az α -t, s ez a metszéspont a szakasznak belső pontja.

A MÉRÉS AXIÓMÁJA:

X. Az E térhez hozzárendeljük a tér pontpárjai halmazának a nemnegativ valós számok halmazára történő d leképezését, melyet távolságfüggvénynek nevezünk, s melyre teljesülnek a következők:

1. $d(P,Q) = d(Q,P)$ minden $P,Q \in E$ -re.
2. Tetszőleges irányított e egyenes, rá illeszkedő P pont és tetszőleges $c \geq 0$ valós szám esetén az e egyenesen egyetlen olyan Q pont létezik, amelyre $P \leq Q$ (P megelőzi Q-t) és $d(P,Q)=c$.
3. Ha P az A,B szakasznak pontja, akkor $d(A,P)+d(P,B) = d(A,B)$.
4. Legyen A,P,B tetszőleges, nem kollineáris ponthármas, ezekre a pontokra teljesül: $d(A,B) < d(A,P) + d(P,B)$. (Szigorú háromszögegyenlőtlenség)

A SZIMMETRIA AXIÓMÁJA:

XI. Tetszőleges γ sík esetén egy és csak egy olyan egybevágóság létezik, amely a γ által meghatározott zárt féltereket egymásnak felelteti meg, s melynél teljesül, hogy a γ sík pontjai fixpontok.

Ez az axiómarendszer G. Choquet axiómarendszerének felhasználásával, módositásával készült, de a megfogalmazásoknál, jelöléseknél figyelembe vettük a tankönyv jelölésrendszerét, hogy bizonyos témakörök után ismét használni lehessen.

A két megalapozás közti lényeges eltérések a következők:

1. A legjelentősebb az, hogy a párhuzamossági axiómát (a VI. axióma - egzisztencia résszel kiegészítve) jóval korábban bevezetjük, mint ahogy a tankönyvben található. Igy bizonyos állítások igazolása egyszerűsödik, viszont lemondunk annak bemutatásáról, hogy ezen axióma használata nélkül a geometria mely fejezetei építhetők föl.
2. A rendezés lényegesen eltér az eredeti felépítésétől, a rendezett halmaz fogalmán alapszik.
3. A mérés axiómájának bevezetése után definiáljuk az egybevágósági leképezést, (eredeti és képpontok távolsága egyenlő) s vizsgáljuk, igazoljuk néhány tulajdonságát. A XI. axióma alapján a síkszimmetria értelmezhető, s mivel egybevágóság, tulajdonságainak egy része már ebből következik. A távolságtartást és a X. axiómát fölhasználva a tankönyvben szereplő tükrözési axiómáknak megfelelő állítások levezethetők, ill. van ami fölöslegessé válik (XII. axióma).
4. A tengelyes tükrözés bevezetése után a síkbeli egybevágósági transzformációkat (a tankönyvben mozgásokat) tengelyes szimmetriák szorzataként értelmezzük.

A centrális tükrözést, eltolást, forgást két tengelyes tükrözés szorzataként definiáljuk, s bizonyítjuk, hogy bármely síkbeli egybevágóság legfeljebb három tengelyes szimmetria szorzataként előállítható. Ezen leképezések jellemzése után kapcsolódunk a tankönyv anyagához. (Sokszögek, Háromszög, egyenlő szárú háromszög, ... Speciális négyszögek stb.) Eltérés a térgeometria tárgyalásánál lesz, a tér egybevágósági transzformációinak kiépítésénél.

Ebben a dolgozatban a felépítés első három fejezete szerepel. A további fejezeteket és a tapasztalatok összegzését a második ill. a harmadik részben mutatjuk be.

1. Térelemek, illeszkedési axiómák

Legyen E nem üres halmaz, amelyet *térnek* nevezünk. Az E elemeit *pont*oknak, az E részhalmazainak egy rendszerét *egyenesek*nek, az E részhalmazainak egy másik rendszerét *sík*oknak tekintjük.

A térelemeket vagy alapelemeket nem értelmezzük, tulajdonságaik a rájuk kimondott axiómákban lesznek, ill. azokból következnek.

A pontokat nagy-, az egyeneseket kisbetűvel, a síkokat görög betűvel jelöljük. A térelemek jelei között az = jel (pl. a=b) a megfelelő két halmaz egyenlőségét jelenti.

1.1 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: A tér pontjainak, egyeneseinek, síkjainak valamilyen meghatározott összességét *geometriai alakzatnak* nevezzük.

A térelemek között különböző relációk vannak, ezek egyike az *illeszkedési reláció*, erre vonatkozik az első axiómacsoport. (A továbbiakban a halmazelméleti jelöléseket használjuk $P \in \alpha$, $e \subset \beta$ stb.)

I. <u>Axióma</u>: A tér, a sík, az egyenes végtelen ponthalmaz.

II. <u>Axióma</u>: A tér tartalmaz legalább két különböző síkot, és minden sík tartalmaz legalább két különböző egyenest.

Ezen axiómák (pl. létezik két egyenes egy síkban) és a halmazelméleti ismeretek felhasználásával megfogalmazhatók a következő értelmezések. Azt, hogy egy pont illeszkedik egy egyenesre vagy síkra, ugy értjük, hogy a pont eleme a tekintett halmaznak; egyenes illeszkedése síkra pedig azt jelenti, hogy $e \subset \beta$.

1.2 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: A tér két, a,b egyenese *párhuzamos* (jele: $a \parallel b$), ha a és b egy síkra illeszkednek és $a \cap b = \emptyset$.

1.3 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: A tér két, a,b egyenese *egyállású*, ha vagy $a=b$, vagy $a \parallel b$.

1.4 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: Az a és b egyenesek *metszők*, ha $a \neq b$ és $a \cap b \neq \emptyset$. (Itt még nem tudjuk, hogy a közös pontok száma mennyi).

1.5 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: Az $E' \subset E$ pontjai *kollineárisak*, ha létezik olyan egyenes, amely tartalmazza E'-t.

1.6 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: Az $E' \subset E$ pontjai *komplanárisak*, ha létezik olyan sík, amely tartalmazza E'-t.

1.7 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: Az a egyenes és α sík *metszők*, ha $a \not\subset \alpha$ és $a \cap \alpha \neq \emptyset$.

III. <u>Axióma</u>: Az E tér bármely két különböző pontjára egy és csak egy egyenes illeszkedik.

IV. <u>Axióma</u>: Ha egy egyenes két különböző pontja illeszkedik a síkra, akkor az egyenes minden pontja illeszkedik a síkra.

V. <u>Axióma</u>: Az E tér tetszőleges, de nem kollineáris ponthármasára egy és csak egy sík illeszkedik.

VI. <u>Axióma</u>: Tetszőleges α síkot, rá illeszkedő a egyenest és tetszőleges $P \in \alpha$, de $P \notin a$ pontot tekintve, a P pontra az α síknak egy és csak egy olyan egyenese illeszkedik, amely az a egyenessel párhuzamos.

(Később a létezés bizonyítható.)

A továbbiakban az A,B ($A \neq B$) pontokra illeszkedő egyenest $\overline{A,B}$ szimbólummal jelöljük.

1.1 <u>KÖVETKEZMÉNY</u>: Két metsző egyenesnek pontosan egy közös pontja van.

Ha kettő lenne, a III ax. miatt a=b teljesülne, de az értelmezés alapján $a \neq b$. A közös pont a *metszéspont*.

1.2 <u>KÖVETKEZMÉNY</u>: Ha egy egyenes és sík metsző, akkor pontosan egy közös pontjuk van.

Ha kettő lenne, a IV. ax. miatt az egyenes illeszkedne a síkra. $a \cap \alpha = M$ – M a *metszéspont*.

1.1 <u>TÉTEL</u>: Ha e és f két metsző, vagy párhuzamos egyenes, akkor pontosan egy olyan sík létezik, amely e-t és f-t tartalmazza.

<u>BIZONYÍTÁS</u>: Legyen $e \cap f = M$.
Az I. ax. miatt létezik $A \in e$ és $B \in f$, de $A \neq M$ és $B \neq M$. Az V. ax. szerint egyetlen α sík létezik, melyre A,M,B illeszkedik, s a IV. ax. alapján e és f illeszkedik α -ra. Tegyük fel, hogy létezik olyan $\alpha' \neq \alpha$, mely szintén tartalmazza e és f -t.

$$e \subset \alpha', \text{ így } A \in \alpha' \text{ és } M \in \alpha' .$$

$$f \subset \alpha', \text{ így } B \in \alpha'.$$

Ezek alapján $\{A,B,M\} \subset \alpha'$, ami az V. ax. szerint azt jelenti, hogy $\alpha = \alpha'$.

Ha $e \parallel f$, akkor a létezés az 1.2 értelmezéséből adódik, az egyértelműség az előzőhöz hasonlóan belátható.

1.2 <u>TÉTEL</u>: Egy egyenes és rá nem illeszkedő pont esetén pontosan egy olyan sík létezik, amely az egyenest és a pontot tartalmazza.

Bizonyítása hasonló a két metsző egyenesre vonatkozó állítás (1.1 tétel) bizonyításához.

1.3 <u>KÖVETKEZMÉNY</u>: Legyen a a tér tetszőleges egyenese, P pedig egy rá nem illeszkedő pont. Egy és csak egy olyan egyenes létezik, amely P-re illeszkedik és a-val párhuzamos.

Az 1.2 tétel alapján P és a egyetlen síkot határoznak meg, abban pedig igaz a VI. axióma.

1.3 TÉTEL: Minden síknak végtelen sok egyenese, a térnek végtelen sok síkja van.

BIZONYÍTÁS: 1. A II. ax. alapján egy tetszőleges α síknak van két különböző egyenese, a és b. Az I. ax. szerint felvehető a-n egy A pont, s ez a b egyenes végtelen sok pontjával végtelen sok α -beli (IV. ax.) egyenest határoz meg.

Igy a sík egy pontjára végtelen sok síkbeli egyenes illeszkedik.

2. A térnek van két különböző síkja β , γ (II. ax.) és felvehető $A \in \beta$ (I. ax.). A tétel első része alapján a γ -nak végtelen sok egyenese van, az 1.2 tétel miatt az A-val együtt mindegyik meghatároz egy síkot, igy a tér A pontjára végtelen sok sík illeszkedik.

1.4 TÉTEL: Bármely sík egyeneseinek a halmazán az egyenesek egyállásúsága ekvivalenciareláció.

BIZONYÍTÁS: Az 1.3 értelmezés alapján ez a reláció reflexiv - a=a; szimmetrikus - ha $a \parallel b \longrightarrow b \parallel a$, vagy

ha $a = b$, akkor $b = a$.

Igazolni kell, hogy ez a reláció tranzitiv.

Legyen $a \parallel b$ vagy $a = b$ és $b \parallel c$ vagy $b = c$. Ekkor, ha az a,b,c egyenesek közül mindhárom, vagy bármely kettő egyenlő, az állítás nyilvánvaló. Ha az egyenesek páronként különbözőek, akkor $a \cap c = \emptyset$. Ha ugyanis a és c metszenék egymást, akkor az $a \cap c = A$ ponton keresztül b-vel két párhuzamos egyenes létezne, ami ellentmond a VI. ax.-nak.

1.4 KÖVETKEZMÉNY: Két párhuzamos egyenes egyikét metsző egyenes metszi a másikat is.

Ha létezik $a \cap c = A$, akkor létezik $b \cap c = B$ is, ellenkező esetben az A ponton át b-vel párhuzamos lenne az a (feltétel volt), és a b is.

1.8 ÉRTELMEZÉS: A *sík egyeneseinek halmazán az egyállásúság relációja által létrehozott ekvivalenciaosztályokat irányoknak nevezzük. Az e egyenest tartalmazó ekvivalenciaosztályt az *e egyenes irányának* mondjuk.

Jele: δ_e

2. Geometriai leképezések és transzformációk

Ebben a fejezetben a továbblépéshez szükséges fogalmak szerepelnek.

2.1 ÉRTELMEZÉSEK:

1. Egy A *ponthalmaznak* egy B *ponthalmazba történő* F *leképezésén* olyan előírást értünk, amely az A minden P pontjához hozzárendeli a B halmaz valamelyik P' pontját. P-t *eredeti pontnak*, P'-t *képpontnak* nevezzük. A P kezdőpontú, P' végpontú nyilat *leképezési nyilnak* nevezzük.

A leképezés jelölése: P'=F(P), P[F]P'

2. Az A halmazt az F leképezés *értelmezési tartományának* mondjuk. Az A halmaz F-képe - *képhalmaz;* ez a B-nek részhalmaza. Ha a képhalmaz egybeesik B-vel, akkor *A-t B-re képeztük le.*

Ha a képhalmaz az A részhalmaza, akkor A-t *önmagába*, ha A egybeesik a képhalmazzal, akkor *önmagára képeztük le.*

3. Ha egy A halmaz önmagába vagy önmagára való leképezésénél egy pont egybeesik a képével; akkor azt a pontot *fixpontnak* nevezzük.

Ha az A halmaz e egyenese pontjainak képei az e egyenesre illeszkednek, akkor az e-t *invariáns egyenesnek* nevezzük. Ha az invariáns egyenes minden pontja fixpont, az egyenes *pontonként fixegyenes*.

Ha egy leképezés az α sík pontjait az α síkra képezi le, α -t *invariáns síknak* nevezzük. Ez is lehet pontonként fix.

2.1 TÉTEL: Két metsző invariáns egyenes közös pontja fixpont.

BIZONYÍTÁS: Legyen az F leképezésnél a és b invariáns és $a \cap b = M$.

$F(M)=M'$ $\quad M \in a$, így $M' \in a$

$M = M'$ mert két különböző

$M \in b$, így $M' \in b$

egyenesnek csak egy közös pontja lehet.

2.2 TÉTEL: Invariáns sík és azt metsző invariáns egyenes közös pontja fixpont.

BIZONYÍTÁS: Legyen $F(\alpha)=\alpha$ és $F(a)=a$ és $\alpha \cap a = M$.

$M \in \alpha$, így $M' \in \alpha$

$M \in a$, így $M' \in a$, $\quad M = M'$,

ellenkező esetben a illeszkedne az α -ra.

2.2 ÉRTELMEZÉSEK:

1. Ha az F leképezés az A-beli kollineáris ill. komplanáris ponthalmazokhoz B-nek egy-egy kollineáris ill. komplanáris ponthalmazát rendeli, akkor az F leképezést *egyenestartónak*, ill. *síktartónak* nevezzük.

2. Az A ponthalmaznak a B ponthalmazra való *egyértelmű leképezésén* olyan leképezést értünk, amely az A minden pontjához B-nek egy pontját rendeli, és B minden egyes pontja valamelyik A-beli pontnak a képe. (szürjektív leképezés)

3. Az A ponthalmaznak a B ponthalmazra való *kölcsönösen egyértelmű leképezésén* olyan egyértelmű T leképezést

értünk, amelynél különböző A-beli pontoknak különböző B-beli pontok felelnek meg. Azaz ha $P \neq Q$, akkor $T(P) \neq T(Q)$. A kölcsönösen egyértelmű leképezést másképpen *transzformációnak* nevezzük. (Bijektiv leképezés; algebrában a transzformáció mást jelent - A önmagába való leképezése; A önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezését permutációnak nevezik).

4. A transzformációnál B minden egyes pontjának egyetlen eredeti pontja van, igy ha a képpontokhoz az eredeti pontokat rendeljük, akkor B-nek A-ra való transzformációját definiáltuk, és ezt a T *inverz transzformációjának* nevezzük, jele: T^{-1}.

5. Legyen A,B,C három ponthalmaz. Az F_1 leképezés vigye A-t B-be, F_2 pedig B-t a C-be. Legyen $P \in A$, s ennek képe legyen: $F_1(P)=P'$, $F_2(P')=P''$. Az F_1, F_2 egymás utáni alkalmazásával P a P''-be került. A leképezések egymás utáni alkalmazását a *leképezések szorzásának* nevezzük.

Jelölése: $P''=F_2(F_1(P))$ vagy $P''=F_2F_1(P)$, ill.

$$P[F_1]P'[F_2]P'' = P[F_1F_2]P''$$

Az F_2F_1 leképezést az F_1 és F_2 leképezések szorzatának mondjuk. (használjuk az $F_2 o F_1$ jelölést is).

6. *Két leképezést egyenlőnek* mondunk, ha az értelmezési tartományuk megegyezik, és annak minden egyes pontjához a képhalmazban ugyanazokat a pontokat rendelik. Jelölése: $F_1=F_2$.

7. Az olyan leképezést, amely az értelmezési tartomány minden pontját fixen hagyja, *identikus leképezésnek* vagy *azonosságnak* nevezzük. Jele: I.

2.1 KÖVETKEZMÉNY: Bármely transzformációt az ineverzével megszorozva identikus leképezést kapunk.

MEGJEGYZÉS: 1. A leképezések szorzása asszociativ, azaz

$$F_3 o(F_2 o F_1) = (F_3 o F_2) o F_1.$$

2. $T^{-1}oI = IoT^{-1} = T^{-1}$ és $ToI=IoT = T$

3. Nem kommutatív, F_2oF_1 általában nem egyenlő F_1oF_2-vel.

2.3 <u>TÉTEL</u>: Ha egy T transzformáció négyzete azonosság, akkor a transzformáció egyenlő az inverzével.

<u>BIZONYÍTÁS</u>: $(ToT=T^2=I) \longrightarrow (T=T^{-1})$

$T^{-1}|ToT=I$ – balról szorozva

$T^{-1}o(ToT)=T^{-1}oI$ – a megjegyzések alapján

$(T^{-1}oT)oT=T^{-1}$ – 2.1 következmény alapján

$IoT = T^{-1}$

$T = T^{-1}$

2.3 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: Azt a leképezést, amelyik megegyezik az inverzével, *involutórikus leképezés*nek nevezzük.

2.2 <u>KÖVETKEZMÉNY</u>: Az A ponthalmaz önmagára történő transzformációinak összessége csoportot alkot.

Érvényesek a csoporttulajdonságok:

1. Ha T_i és T_j két tetszőleges transzformáció, akkor a szorzatuk is az összességhez tartozik.
2. A szorzás művelete asszociatív, azaz $T_ko(T_joT_i) = (T_koT_j)oT_i$
3. A transzformációk összessége a transzformációk inverzeit is tartalmazza.
4. Az összességnek az identikus transzformáció is eleme. (egységelem). A csoporttulajdonságok figyelembevétele az algebra eszközeinek felhasználását teszi lehetővé.

A továbbiakban bevezetünk egy leképezést, amelynek tulajdonságait a későbbiek során jól tudjuk alkalmazni.

2.4 <u>TÉTEL</u>: Legyen a tetszőleges α síkbeli egyenes, és δ , α -beli, a-tól különböző irány. Minden egyes $P \in \alpha$ ponthoz létezik olyan δ irányú egyenes, amely metszi a-t valamilyen

$\varphi(P)$ pontban.

<u>BIZONYÍTÁS</u>: 1. $P \in a$ – a VI. ax. miatt igaz az állítás.

2. $P \notin a$ – VI. ax. – létezik e egyenes, és létezik $a \cap e = \varphi(P)$ pont is; ellenkező esetben $a \parallel e$, de feltétel volt, hogy $\delta \neq \delta a$.

2.4 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: Az α halmaznak az a halmazra való, a 2.4 tételben leirt φ leképezését az α –nak a–ra történő δ iránnyal *párhuzamos vetítésének* (röviden δ irányú vetítésnek) nevezzük.

2.3 <u>KÖVETKEZMÉNY</u>: Tulajdonságok:

1. $\varphi(\alpha)=a$, azaz síknak egyenesre történő leképezése; nem kölcsönösen egyértelmű leképezés.
2. $\varphi(a)=a$ – A leképezés fixpontjai, azaz amelyekre $\varphi(X)=X$, az a egyenes pontjai és csak azok.

A párhuzamos vetítésnél az értelmezési tartomány lehet az α sík valamely részhalmaza is, s igy beszélhetünk például egyenesnek egyenesre történő párhuzamos vetítéséről.

2.5 <u>TÉTEL</u>: Legyen a,b két tetszőleges, α -beli egyenes és $\delta \subset \alpha$ ezen egyenesek irányától különböző irány. Az a egyenesnek a b egyenesre történő δ irányú vetítése az a-nak – b-re történő kölcsönösen egyértelmű leképezése.

<u>BIZONYÍTÁS</u>: Legyen φ a feltételeknek eleget tevő párhuzamos vetítés. $\varphi(a)=b$ teljesül, mivel a b minden Y pontján átmenő δ irányú egyenes metszi a-t valamilyen X pontban, és $\varphi(X)=Y$.

Ha X és X' az a egyenes két különböző pontja, akkor az ezekre illeszkedő δ irányú egyenesek is különbözőek, és a b egyenest a különböző $\varphi(X)$, $\varphi(X')$ pontokban metszik.

Mindezekből az is nyilvánvaló, hogy b-nek a-ra történő δ irányú vetítése kölcsönösen egyértelmű.

A síkot kölcsönösen egyértelműen képezzük le, ha két metsző egyenesre vetítjük, a következőképpen:

2.5 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: Legyen e_1, e_2 az α sík két metsző egyenese. Jelöljük φ_1-el α-nak e_1 -re történő, e_2 -vel párhuzamos vetítését; φ_2-vel α-nak e_2 -re történő, e_1 -vel párhuzamos vetítését. Az e_1 és e_2 egyeneseket ezen leképezéseknél *tengelyeknek* nevezzük. Tetszőleges $P \in \alpha$ pont esetén a $\varphi_1(P)$ és $\varphi_2(P)$ pontokat a P pontnak az e_1 és e_2 tengelyek rendszerére vonatkozó *meghatározóinak* (összetevőinek) nevezzük. Az $e_1 \cap e_2 = O$ a rendszer *kezdőpontja*.

2.4 <u>KÖVETKEZMÉNY</u>: Az α sík minden (P_1,P_2) pontpárjához, hol $P_1 \in e_1$ és $P_2 \in e_2$, az α síknak egyetlen olyan P pontja tartozik, amelyre teljesül, hogy $P_1=\varphi_1(P)$ és $P_2=\varphi_2(P)$; ez a pont a P_1 -re illeszkedő és e_2 -vel párhuzamos, valamint a P_2-n átmenő és e_1-el párhuzamos egyenesek metszéspontja. A $P \longrightarrow (\varphi_1(P),\varphi_2(P))$ leképezés tehát az α halmaz bijektiv leképezése az $e_1 \times e_2$ szorzathalmazra. (Ha az egyenesek számosságát λ -val jelöljük, a sík számossága λ^2).

3. Rendezési axiómák

<u>VII. axióma</u>: Minden egyenesen létezik két, egymással ellentétes rendezés.

<u>MEGJEGYZÉS</u>: Ebben az axiómában szerepel a "rendezés", amely halmazelméleti fogalom. (Dr. Szendrei János: Algebra és számelmélet főiskolai tankönyv definicióját és jelölését használjuk.)

Szemléletesen: ha az egyenes pontjait "befutjuk" az egyik irányban, meghatározunk rajta egy rendezést.
A bevezetett axióma segítségével a következő lényeges fogalmak definiálhatók:

3.1 ÉRTELMEZÉSEK:

1. Azokat az egyeneseket; amelyeken a két rendezés valamelyike adott, *irányított egyeneseknek* nevezzük.

2. Két, különböző A,B pont esetén az $\overline{A,B}$ *irányított egyenes* kifejezés azt az $\overline{A,B}$ egyenest jelenti, melynek az irányítása olyan, hogy A<B.

3. Legyen e tetszőleges irányított egyenes és P tetszőleges $P \in e$ pont. Az $\{X; A<X\}$ és az $\{X; A>X\}$ halmazokat az e irányított egyenes *A kezdőpontú nyilt félegyeneseinek*, az $\{X, A\leq X\}$ és $\{X; A\geq X\}$ halmazokat *A kezdőpontú zárt félegyeneseinek* nevezzük.

Az $\overline{A,B}$ félegyenes a továbbiakban az $\overline{A,B}$ irányított egyenes azon A kezdőpontú zárt vagy nyilt félegyenesét jelenti, amely tartalmazza a B-t. B-belső pont.

4. Az A,B pontok által meghatározott egyenesen, mindkét rendezésnél, az $\overline{A,B}$ és a $\overline{B,A}$ zárt félegyenesek közös pontjainak a halmaza ugyanazon pontokból áll, ezt a ponthalmazt nevezzük *szakasznak*. Jele: $[A,B]$ A és B - a szakasz végpontjai, az ezektől különböző, a szakaszhoz tartozó pontok - belső pontok.

Az $[A,B]$ -t szokás zárt intervallumnak is nevezni, míg a nyilt félegyenesek, ill. nyilt és zárt félegyenesek metszeteként adódó ponthalmazok neve *nyilt* ill. *félig zárt intervallum*. ($]A,B[$ ill. $[A,B[$)

Bármely pontra teljesül:

$$[A,A] = \{A\} \quad \text{és} \quad]A,A[= \emptyset.$$

5. Ha A,B,C pontok az e egyenes pontjai, és A<B<C, vagy A>B>C teljesül, akkor azt mondjuk, hogy B *elválasztja* A és C-t, B az A és C között van.

MEGJEGYZÉS: Az 5. esetben B az $[A,C]$ belső pontja, s fordítva, ha $B\in]A,C[$, akkor A<B<C, vagy A>B>C teljesül.

6. Az E halmaz E' részhalmaza *konvex*, ha tetszőleges $Y,Z\in E'$ esetén $[Y,Z]\subset E'$.

3.1 <u>KÖVETKEZMÉNY</u>: Minden sík, egyenes, félegyenes, szakasz konvex halmaz.

3.2 <u>KÖVETKEZMÉNY</u>: Az E tér tetszőleges konvex részhalmazainak metszete is konvex halmaz.

3.2 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: Egyenes, félegyenes, szakasz közül bármely kettőt (lehet pl. szakasz-szakasz) metszőnek nevezünk, ha az általuk meghatározott egyenesek metszők, és a metszéspontot mindkét alakzat tartalmazza.

<u>VIII. axióma</u>: Minden a,b párhuzamos egyenespár és tetszőleges $A,A'\in a$ és $B,B'\in b$ pontnégyes esetén az $[A,B]$-t metsző és az a,b egyenespárral párhuzamos egyenesek mindegyike metszi az $[A',B']$ -t is.

<u>MEGJEGYZÉS</u>: Ez az axióma a különböző egyenesek rendezései között teremt kapcsolatot. (Ennek lesz a következménye az, hogy a párhuzamos vetítés rendezéstartó.)

3.3 <u>KÖVETKEZMÉNY</u>: Legyen e az α sík tetszőleges egyenese, $\delta\subset\alpha$, e irányától különböző irány és φ az e-re történő, δ irányú vetítés.

Ekkor minden $X,Y\in\alpha$ esetén

$$\varphi([X,Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)].$$

Ha X és Y egy δ irányú egyenesen van, akkor

$$\varphi\,[X,Y] = \{\varphi(X)\} = \{\varphi(Y)\}.$$

Ha $\overline{X,Y}$ nem δ irányú egyenes, akkor a VIII. axióma alapján a φ leképezés az $[A,B]$ kölcsönösen egyértelmű leképezése a $[\varphi(X), \varphi(Y)]$ -ra.

3.4 <u>KÖVETKEZMÉNY</u>: Minden $\alpha'\subset\alpha$ konvex halmaz a egyenesre történő, párhuzamos vetítéssel kapott $\varphi(\alpha')$ képe szintén konvex halmaz.

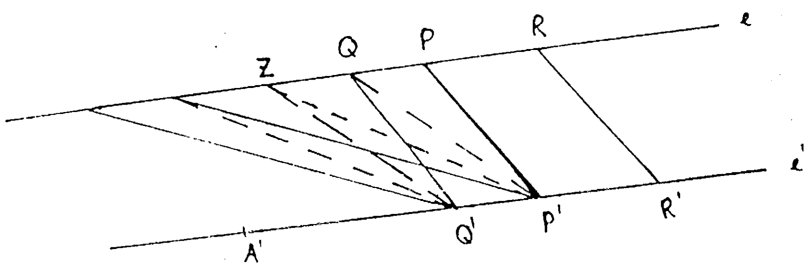
3.5 <u>KÖVETKEZMÉNY</u>: Egy egyenesnek egyenesre történő párhuzamos vetítése, hol a vetítés iránya különbözik az egyenesek irányától, rendezéstartó leképezés.

Ha $X,Y,Z \in e$ tetszőleges ponthármas, ugy hogy Y az X és Z között van, akkor a 3.3 köv. alapján a $\varphi(Y)$ is a $\varphi(X)$ és $\varphi(Z)$ között van, hol $\varphi(Y),\varphi(X)$ és $\varphi(Z)$ egy f egyenes pontjai.

(Azaz, a párhuzamos vetítés az e-nek f-re történő monoton csökkenő v. növekvő fv-e. Ha pl. $X<Y<Z$, akkor $\varphi(X)<\varphi(Y)<\varphi(Z)$ vagy $\varphi(X)>\varphi(Y)>\varphi(Z)$ teljesül. Az egyik egyenes két rendezésének bármelyike izomorf a másik egyenes egyik rendezésével. Többszöri vetítéssel belátható, hogy egy egyenes két rendezése is izomorfizmus.)

3.6 <u>KÖVETKEZMÉNY</u>: Egy tetszőleges e egyenes P kezdőpontú mindkét félegyenese végtelen halmaz.

Az e egyenes és a tér egy $A' \notin e$ pontja meghatároznak egy síkot. A VI. axióma alapján létezik az $e' \parallel e$. (1.ábra)



1. ábra

Az I. ax. alapján felvehető e'-n P', Q', R' pont (A'-től függetlenül), és legyen $Q'<P'<R'$. A $\overline{P,P'}$ nem párhuzamos e-vel, igy Q',R' $\overline{P,P'}$-vel párhuzamos vetülete e-n Q,R, melyekre a 3.3 és 3.5 következmény miatt $P\in]Q,R[$, s igy a P kezdőpontú egyik félegyenes sem üres halmaz.

Q'-t vetítsük $\overline{P'Q}$ -val párhuzamosan e-re; 1.4 következmény miatt létezik az e-vel való Z metszéspont, s a rendezéstartás miatt $Q\in]Z,P[$. A Q'-t $\overline{P',Z}$ -vel párhuzamosan vetítve ujabb R pont adódik, s a konstrukció végtelen sok pontot eredményez.

3.1 TÉTEL: Tetszőleges, α síkbeli egyenes esetén létezik az $\{\alpha\setminus e\}$ halmaznak két, α_1 és α_2, végtelen, konvex halmazra történő egyértelmű felbontása. Az α sík tetszőleges X_1,X_2 pontjára teljesül, hogy ha $X_1\in\alpha_1$ és $X_2\in\alpha_2$ akkor az $[X_1,X_2]$ metszi az e egyenest egy P pontban, és $P\neq X_i$ $(i=1,2)$.

BIZONYÍTÁS:

1. A létezés igazolása: Legyen e-t A pontban metsző α -beli egyenes a. Jelöljük φ -vel α -nak e-vel párhuzamos, a-ra történő vetítését, a_1 és a_2 -vel az e egyenes A kezdőpontú nyilt félegyeneseit.

Ezek a félegyenesek konvexek, és az $a\setminus\{A\}$ halmaz felbontását adják. $(a_1\cup a_2 = a\setminus\{A\}$ és $a_1\cap a_2=\emptyset)$ Legyen α_1 azon α beli pontok halmaza, melyek képe a_1, α_2 pedig azoké, melyek képe a_2; ezek konvex halmazok. Az α_1, α_2 számossága legalább akkora, mint a_1 ill. a_2 -é.

2. Egyértelműség: Legyen α_1^*, α_2^*, az $\{\alpha\setminus e\}$ egy másik, konvex halmazokra történő felbontása, azaz $\alpha_1^*\cup\alpha_2^*=\{\alpha\setminus e\}$ és $\alpha_1^*\cup\alpha_2^*=\emptyset$. A $\varphi(\alpha_1^*)$ és a $\varphi(\alpha_2^*)$ halmazok is konvexek, tehát az a_1, a_2 félegyenesek valamelyikével egybeesnek. Igy az α_i^* halmazok valamelyikét az α_i $(i=1,2)$ halmazok valamelyike tartalmazza.

Mivel $\alpha_1^*\cup\alpha_2^*=\alpha_1\cup\alpha_2=\{\alpha\setminus e\}$ és az α_i-k egyike sem üres, igy vagy $\alpha_1^*=\alpha_1$ és $\alpha_2^*=\alpha_2$ vagy $\alpha_1^*=\alpha_2$ és $\alpha_2^*=\alpha_1$. Tehát az indexek sorrendjétől eltekintve az α_1^*, α_2^* felbontás egybeesik az α_1, α_2 felbontással.

3. Ha $X_1\in\alpha_1$ és $X_2\in\alpha_2$, akkor az $[X_1,X_2]$ metszi e-t. A feltételből következik, hogy a $\varphi([X_1,X_2])$ végpontjai az a_1 és a_2 -n vannak, ami azt jelenti, hogy ezen szakasznak az A belső pontja. Igy a VIII. axióma alapján az $[X_1,X_2]$-t az e

egyenes metszi.

3.3 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: Az előző tételben jellemzett α_1, α_2 halmazokat az α sík e egyenese által meghatározott *nyilt félsík*jainak nevezzük. Az $\alpha_1 \cup e$ és $\alpha_2 \cup e$-t az e által meghatározott *zárt félsík*oknak nevezzük.
Az e a félsíkok *határegyenese*, az e pontjaitól különböző pontok, *belső pontok*.

3.4 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: Egy *félegyenes* vagy *szakasz metsz* egy *síkot* (nyilt vagy zárt *félsíkot*), ha az általa meghatározott egyenes metszi a síkot (a félsík által meghatározott síkot), és a metszéspont mindkét tekintett alakzatra illeszkedik.

<u>IX. axióma</u>: Tetszőleges α sík esetén létezik az $E \setminus \alpha$ halmaznak két olyan E_1, E_2 végtelen részhalmazra történő felbontása, amelyeknél tetszőleges X_1 és X_2 pontra $X_1 \in E_1$ és $X_2 \in E_2$ akkor és csak akkor teljesül, ha létezik az $[X_1, X_2] \cap \alpha = \{P\}$ egyelemű halmaz, és $P \neq X_i$ $(i=1,2)$.

3.5 <u>ÉRTELMEZÉS</u>: Az axiómában leirt E_1 és E_2 halmazokat az α sík által meghatározott *nyilt félter*eknek nevezzük. Az $\alpha \cup E_1$ és $\alpha \cup E_2$ *zárt félterek*. α - a féltér *határsíkja* - pontjai *határpontok*, E_i pontjai - *belső pontok*. $(i=1,2)$

3.2 <u>TÉTEL</u>: Ha egy α síkot A pontban metsz egy a egyenes, akkor az egyenesnek az α határsíkú nyilt félterekkel közös pontjainak halmaza az e egyenes két, A kezdőpontú nyilt félegyenese.

<u>BIZONYÍTÁS</u>: Legyen $B \in a$ és $B \neq A$, valamint $B \in E_1$.
Tekintsük az E_2 tetszőleges C pontját. Ha $C \in a$, az állítás igaz. Ha $C \notin a$, akkor tekintsük a C, a által meghatározott α' síkot.
IX. ax.: $[BC] \cap \alpha = Q$ és $Q \neq A$. $[BC] \subset \alpha'$, ezért

$$\left.\begin{array}{lll} Q \in \alpha' & \text{és} & A \in \alpha' \\ Q \in \alpha & \text{és} & A \in \alpha \end{array}\right\} \text{így } \alpha \cap \alpha' = \overline{A,Q} = b.$$

Legyen D az α' sík b által meghatározott azon félsíkjában, mint a C, és $D \in a$ teljesüljön. $[CD]$ nem metszi a b-t, így α-t sem, ezért $D \in E_2$. Az α' b által meghatározott, C-t tartalmazó félsíkjában az a-nak A kezdőpontú egyik félegyenese van, s ennek bármely pontjáról belátható, hogy E_2-ben van. (A másik félegyenese E_1-ben).

3.3 TÉTEL: Ha α és β két különböző sík, akkor vagy $\alpha \cap \beta = \emptyset$, vagy az $\alpha \cap \beta$ pontjai kollineárisak.

BIZONYÍTÁS: Legyen $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ és $A \in \{\alpha \cap \beta\}$

Tekintsük az α sík A-ra illeszkedő két különböző, a,b egyenesét. Ha ezek közül az egyik illeszkedik β-ra is, a bizonyítás kész. Ha ez nem teljesül, akkor az előző tétel alapján az a egyenesen létezik $X_1 \in E_1$, $X_2 \in E_2$ pont, ahol E_1, E_2 a β által meghatározott nyilt féltereket jelentik. A IX. axióma miatt $[X_1,X_2]$ metszi β-t A-tól különböző B pontban. $\overline{A,B}$ a két sík közös egyenese. Ettől különböző közös pont nincs, mert az 1.2 tétel alapján akkor $\alpha = \beta$ teljesülne.

3.6 ÉRTELMEZÉS: Ha α és β két különböző sík és van közös egyenesük, akkor a két síkot *metszőnek* nevezzük, közös egyenesüket *metszésvonal*nak.

Síkot és *félsíkot* ill. *két félsíkot metsző*nek nevezünk, ha az általuk meghatározott síkok metszők és a metszésvonalnak legalább egy pontja mindkét geometriai alakzatra illeszkedik.

3.7 ÉRTELMEZÉS: *Két síkot párhuzamosnak* nevezünk, ha metszetük üres halmaz.

3.7 KÖVETKEZMÉNY: Ha két sík metszi egymást, az egyiknek a másik által határolt félterekkel közös részei a közös határegyenesű, különböző félsíkok.

Az m-t metsző α -beli egyenesek két, a metszéspont által meghatározott félegyenesei a 3.2 tétel alapján a két β határú féltérben vannak, s a félsíkok konvexitása alapján α két, m határú félsíkjában is. (β -re hasonlóan belátható az állítás.)

3.4 <u>TÉTEL</u>: Két, nem párhuzamos invariáns sík közös egyenese invariáns egyenes.

<u>BIZONYÍTÁS</u>: $F(\alpha) = \alpha$, $F(\beta) = \beta$ $\quad \alpha \cap \beta = m$,

$m \subset \alpha$ és $m' \subset \alpha$

$m \subset \beta$ és $m' \subset \beta$. $m=m'$ mert két metsző síknak két közös egyenese nem lehet. (Ha $\alpha = \beta$, az állítás nyilvánvaló).

IRODALOM

[1] G.Choquet, Geometria, Mir (Moszkva), 1970.

[2] Dr. Hajós György, Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.

[3] Dr. Pelle Béla, Geometria, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.

[4] Radó Ferenc - Orbán Béla, A geometria mai szemmel, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1981.

[5] Dr. Redling Elemér, Geometriai transzformációk, Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.

[6] Dr. Szendrei János, Algebra és számelmélet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.

[7] Vigassy Lajos, Egybevágósági transzformációk a síkban és a térben, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.

OROSZ GYULÁNÉ

A MATEMATIKA MIKROTANÍTÁSRÓL

ABSTRACT: *(On the mathematics micro teaching) In the 6th term the students of the Department of Mathematics study methodology. Our main purpose is to make our students teach mathematics the help of the given methods and make their lessons more interesting. For realising this teaching method we introduced micro teaching in our seminars. This paper is about this way of teaching and our experiences. The structure of this paper is as follows: Introduction, General thoughts about micro teaching, Micro lesson in practice on video, The steps of teaching a given subject, Conclusions about micro lessons.*

A tudomány és a társadalom rohamos fejlődésével megváltoztak a tudásról, a műveltségről és a képességekről alkotott nézeteink. Ezeket a változásokat a korszerű matematikatanításnak is követnie kell. Erre tekintettel a tantervi korrekció a tananyagot helyenként átrendezi, kibővíti, a korábbinál nagyobb hangsúlyt fektet a kreativitás fejlesztésére. Továbbra is fontosnak tartja a készségfejlesztést és a szilárd, alkalmazás képes ismeretelsajátítást.

A korszerű, egységes felépítésű matematika tananyag tanításához szinvonalasabb pedagógiai és szakmai felkészültség, fokozott teherbírás és kreativitás szükséges.

Ha ezeknek az elvárásoknak az általános iskolai tanárok szeretnének eleget tenni, akkor törekedniük kell arra, hogy változatosabb munkaformákat alkalmazzanak, óráik felépítése érdekes, sokszinű legyen. Ezeket a tényezőket szem előtt tartva kell felkészítenünk matematika szakos hallgatóinkat szaktárgyuk tanítására. Ennek érdekében nekünk, a leendő általános iskolai tanárok oktatóinak kell a fenti követelményeknek megfelelni, azaz szinvonalas oktató-nevelő munkát végezni.

Mindezek gyakorlati megvalósítása korántsem ilyen egyszerű, mint fenti megfogalmazása. Sorolhatnánk a tárgyi és személyi feltételek hiányát, egyéb objektiv tényezőket, kereshetnénk kibúvókat, de ezek nem oldanák meg valós gondjainkat. Véleményem szerint a legtöbb problémán egyendül mi magunk tudunk segiteni, nehézségeinken enyhiteni.

Ugy gondolom, hogy a társadalmi elvárások, az oktatásügyet ért kritikai észrevételek és a saját munkánk iránti igényesség mindannyiunkat arra ösztönöz, hogy ki-ki a saját elképzelése, egyénisége és lehetőségei szerint eleget tegyen az elvárásoknak.

A Matematika tanítása tantárgyat oktatva tanszékünkön igyekszünk a fenti gondolatok szellemében tanitani hallgatóinkat. Az a meglátásunk, hogy ehhez a munkához nem elegendők saját tapasztalataink, mások eredményeiből is tanulnunk kell. A szaktanárokkal történő konzultációkkal, a konferenciákon való részvétellel van erre lehetőség. A metodikai témájú cikkek, könyvek tanulmányozása során megismerkedhetünk a matematika szakos tanárképzés módszertanával, eredményeivel, gondjaival. Mindezek mellett tág teret kaphatnak az önálló kezdeményezések is. A mikrotanitásokkal kapcsolatban számos külföldi és hazai irodalom megjelenése bizonyitja ezek létjogosultságát.

A metodika legfontosabb feladata, hogy a hallgatókat felkészitse a matematika általános iskolai tanítására. Azzal a reménnyel, hogy esetleg munkánk hatékonyságát fokozza az 1989-90-es tanév I. félévében Szilák Aladárné kolléganőmmel kezdeményeztük a mikrotanítások bevezetését szemináriumi csoportjainkban. Arra is tekintettel tettük ezt, hogy a hallgatók és a gyakorlóiskolák korábban jelezték ez iránti igényüket. A következő gondolatok e tevékenység kapcsán születtek.

I. Általános megjegyzések

Mivel a köztudatban igen sokféle változatban találkozunk a mikroóra és mikrotanítás fogalmakkal, ezért szükséges tisztázni értelmezésüket. A továbbiakban a mikroórán egy rövid tanítási órát, a mikrotanításon egy kisebb tananyag hallgatók előtt bemutatott tanítását fogjuk érteni. Időtartama 15-20 perc, amely rugalmasan néhány perccel lehet rövidebb, illetve hosszabb is. Az a hallgató, aki a csoport előtt mikroórát tart óratervezettel készül az előzetesen kijelölt általános iskolai tananyagból. A csoport többi tagja óravázlatot ír ugyancsak ebből az anyagrészből. A hallgatók veszik át az általános iskolai tanulók szerepét és biztosítják a szükséges taneszközöket. A mikrotanítás nem kötelező, igy lehetőség van arra, hogy a csoportból azok a hallgatók vállalkozzanak rá, akik kedvet éreznek hozzá. Az érdeklődés csoportonként változó. A III. évfolyam matematika-rajz-angol csoportomban például mindenki szeretne ilyen órát tartani, igy a következő félévben is folytatjuk ezt a munkát, hiszen eddig 6-an kaptak lehetőséget a 18 főből. A matematika-fizika szakos hallgatóim közül kevesebben jelentkeztek ilyen tevékenységre. Videófelvételt abban az esetben készítünk, ha a hallgatók is igénylik azt.

II. A mikroórák gyakorlati megvalósításának szakaszai

1. A szemináriumot vezető tanár mikroórát mutat be a hallgatóknak.
2. Szervezési feladatok, a mikrotanítás előkészítése.
3. Egy hallgató mikrotanítása a csoport előtt. Videofelvétel.
4. A videofelvétel lejátszása, óraelemzés, hibák javítása.

Nyilván más csoportosítás is elképzelhető, de a gyakorlati tapasztalatok alapján ez célszerűnek látszik és könnyen áttekinthető. Minden szakasz részletes leirására a terjedelem miatt a továbbiakban nem vállalkozunk, ezért a következő rész a mikroóra modell tanári bemutatásával foglalkozik, konkrét példán keresztül.

Egy mikroóra tanári bemutatása:

Mivel az 5. osztályos tananyag feldolgozását kezdtük el a szemináriumokon, a mikroórák tananyagát is onnan választottam. Az 5. osztályos tankönyv I. fejezetéből például az Arányos következtetéseket, mint tanítási egységet mutattam be hallgatóimnak.

A mikrotanítás előtt a következőkre hivtam fel figyelmüket: ötödik osztályban nem definiáljuk az egyenes és fordított arányosságot.
A szöveges feladatok megoldása során következtetünk egyről többre, többről egyre, egyenes és fordított arányosság esetén.

Két mennyiség változását figyeltetjük meg a gyerekekkel (arányos, nem arányos).
Fordítsunk figyelmet a becslésre, ellenőrzésre!
Követelmény a jártassági szint elérése arányossági következtetések végzésében egyenes és fordított arányosság esetén.

Fontos volt erről szólni, mert több hallgató az egyenes és fordított arányosságot, mint függvényt és a hányados arányként való értelmezését kiemelve írt óravázlatot ebből az anyagrészből.

A mikroóra feladatai néhány tanári utasítással:

Tanítási egység: Arányos következtetések

Osztály: 5.

Tanár: Gyerekek! Nagyon figyeljetek rám! Fejben számítsátok ki a következőket! A kérdések sorrendjében írjátok le a végeredményeket! Füzetcserével fogunk javítani. Hibátlan megoldásra piros pontot kaptok.

1. feladat:

2 kg hány dkg?
Fél kg hány dkg?
Negyed kg hány dkg?
1 óra hány másodperc?
2 óra hány perc?
20 óra hány perc?
Mennyi 150-nek az ötszöröse?
Mennyi 1000-nek a negyed része?
2 és fél km hány méter?

Tanár: A hetes jelentette nekem, hogy az osztály létszáma 34. A következő feladat ezzel kapcsolatos. Oldjátok meg önállóan!

2. feladat:

Az osztály minden tanulójának szeretnék 3 szem cukrot adni. Hány zacskóval kellene vásárolnom, ha 1 zacskóban 20 szem cukorka van?

Tanár: Gyerekek! Tudjátok-e mennyibe kerül 1 kg banán? Számítsátok ki a táblázat alapján!

3. feladat:

Töltsétek ki a táblázatot!

kg	3	1	5		8	15
Ft	225			750		

Megjegyzések a feladatok kiválasztásához:

Olyan feladatokat mutattam be, amelyek nem szerepelnek a taneszközökben. Nagyon sok érdekes és változatos feladatanyag található az 5. osztályos tankönyvben és munkafüzetben a témakörhöz kapcsolódva. Azért nem azok közül választottam, mert ilyen módon is szerettem volna ösztönözni hallgatóimat, hogy ők is vállalkozzanak feladatok konstruálására.

Az első feladattal gyakoroltathatjuk a mértékegységek átváltását.

A megoldás során következtetünk egyről-többre, többről-többre, gyakoroljuk egy mennyiség tört részének kiszámítását. A hallgatók lelkesen oldották meg ezt a feladatot, próbálták beleélni magukat a gyerekek helyébe. Néhány hallgató (nyilván figyelmetlenségből adódóan) hibás választ adott az 1. feladat negyedik kérdésére (1 óra 360 s).

Megbeszéltük, hogy a feladat megoldása előtt ismételjük át a tanult mértékegységeket (idő, tömeg, hosszúság). Elemeztük a tanári utasítások egyértelműségét, feltártuk az esetleges hibákat, azok javítási módját, a megoldásra fordítható időtartamot.

A 2. feladat a hallgatók szerint motiváló hatású, a gyerekek számára érdekes. Mielőtt megoldjuk, kérjünk becslést a gyerektől arra vonatkozóan, hogy hány zacskó cukrot kellene vásárolni. A következő lépésben tisztázzuk, hogy hány szem cukorra van szükségünk. Érdemes elemezni, hogy 5 zacskóba 5·20=100 szem cukorka fér, ezért 6 zacskó cukrot kell vásárolnunk, ha 102 szem cukrot osztunk szét. További vizsgálódást jelenthet, hogy a maradék 18 szem cukrot hogyan tudjuk szétosztani.

A jobb képességű tanulóktól megkérdezhetjük:

Hány szem cukor lehet abban a zacskóban, ha mind a 34 gyerek 3 szemet kap és nem marad cukorka?

Lehetséges válaszok: 17, 34. Ilyen módon élhetünk a számelmélethez kapcsolódó belső koncentrációs lehetőséggel is.

A 3. feladat megoldása előtt érdemes megbeszélni a gyerekekkel, hogy mennyibe kerül 1 kg banán, és az általuk adott értékeket összevetni a mi eredményünkkel (75 Ft). A táblázat kitöltésével fejleszthetjük a számolási készséget, felismertethetjük ha 2-szer, 3-szor annyi mennyiséget vásárolunk, akkor 2-szer, 3-szor annyit fizetünk.

Fejleszthetjük a tanulók gyakorlati érzékét, ha megbeszéljük pl. hogy egy évvel ezelőtt 750 Ft-ért mennyivel több banánt tudtunk vásárolni, mint jelenleg.

III. Összefoglaló véleményem a mikrotanítások bevezetéséről

1. Szinesebbé, változatosabbá teszik a szemináriumokat.
2. Gondos előkészítő, elemző munkával metodikai képzésünk hatékonyságát javíthatják.
3. A hallgatóság körében népszerűek, munkájukra motiváló hatásúak.
4. Előnyös, ha videofelvételt készítünk, mert értékes információkat gyüjthetünk, amelyek más szemináriumi csoportokban is hasznosíthatók.
5. A hallgatók és a tanár számára egyaránt többletmunkát jelent, de a tapasztalatok azt mutatják érdemes erre vállalkozni.
6. Ideális az, ha minden hallgató aktív részese ennek a tevékenységnek. (18-20 fős csoportjaimban ez 2 félév alatt megvalósítható).

Szeretnénk, ha megfigyeléseink közzététele gondolatokat ébresztene egyéb területeken való alkalmazáshoz, hiszen nagyon helytállóak Kárteszi Ferenc szavai: "Az a tanár, aki maga is folyton tanul, fogékonyabb a tanulók tanulási problémáinak megértése iránt, mint az, aki napról-napra felejt, s évről-évre csak a saját megcsontosodott eljárásait ismétli."

IRODALOM

[1] Dr. Czeglédy István - Dr. Czeglédy Istvánné - Dr. Hajdu Sándor - Novák Lászlóné, Kézikönyv a matematika 5. osztályos anyagának tanításához, Budapest, Tankönyvkiadó, 1989.

[2] Dr. Pólya György, A problémamegoldás iskolája I. II. kötet, Budapest, Tankönyvkiadó, 1971.

[3] Dr. Vörös György, Szemelvénygyüjtemény a matematika tanításához, Budapest, Tankönyvkiadó, 1989.

[4] Utmutató az általános iskolai matematika tananyagának korrekciójához 5-8. osztály, Budapest, OPI, 1987.

SZILÁK ALADÁRNÉ

A SZÁMÍTÁSTECHNIKA ALAPJAINAK OKTATÁSA ÉS ALKALMAZÁSA A MATEMATIKA ÓRÁKON, A SZÁMÍTÁSTECHNIKA ÉS A MATEMATIKA KÖLCSÖNHATÁSA

(Egy kisérlet tapasztalatai)

ABSTRACTO: *(Bazoj de kalkulekniko-instruado kaj aplikado dum la matematikaj studhoroj, reciprokeco de kalkulekniko kaj matematiko.) La instruado de kalkulekniko - alligite al matematikaj bazaj studmaterioj kaj al la kompletiga studmeterioj, - en kadro de studhoroj ege malopurtuna duon aperigita temo.*

Inter la nunaj cirkonstancoj en la bazlerneja metematikoinstruado, se ni povus instrui la bazon de kalkulekniko (la formiĝon de kapablo de algoritmado), se ni povus apliki la komputilon en la instruado kiel instruhelpilon, tiuj signifus pluan modernigon.

Al tiu temo kaj problemo alligas mia eksperimento, - pri kiu mi donos mallongan sciigon kaj mallongan sumon ĝis nun kolektikaj kaj ordigitaj resumoj.

A számitógéptudomány az elmult évtiezedekben óriási fejlődésen ment keresztül. A számitástechnika elterjedésével egyre több olyan szakemberre van szükség, akik tervszerű, szakszerű képzésben vesznek részt, és szinte a számitástechnikával nőnek fel. Ezekhez az igényekhez igazodva a számitástechnikai program keretében már az általános iskolában biztositani kell, hogy a tanulók elsajátitsák a számitástechnika alapjait, megismerkedjenek a számitógépekkel.

A számitástechnikai ismeretek szakköri, illetve fakultáció keretében történő oktatására számtalan példa, próbálkozás van, melyek eleget is tesznek az elvárásoknak. A számitástechnika oktatása kimondottan a matematika törzs- és kiegészitő anyagához kapcsolódva, órai keretek között rendkivül mostohán kezelt terület. Hasonlóan van ez középiskolában is. A kialakult helyzet objektiv és szubjektiv feltételekkel egyaránt magyarázható:

- Nincs minden iskolában számitógép, vagy ha van, a gépi lehetőségek igen eltérőek.
- Nincs megfelelő tanári segédanyag (tankönyv, útmutató, munkalap, feladatlap).
- Nagyon zsufolt a tananyag, ezért a számitástechnika alapjainak a "becsempészése" a matematika órákba esetleg a matematika más területei oktatásának a rovására menne.
- Nem minden matematika tanár rendelkezik olyan számitástechnikai felkészültséggel, ismeretekkel, hogy azt a kivánt szinten tovább tudná adni. (A 20-25 éve diplomát szerzett pedagógusok felsőoktatási képzés keretében nem tanultak számitástechnikát. Csak továbbképzéseken, tanfolyamokon, önképzéssel szerezhettek ilyen jellegű ismereteket.)
- Sajnos az utóbbi években végzett matematika tanárok közül sem vállalja mindegyik a számitástechnika oktatásával járó nehézségeket.

A jelenlegi körülmények között véleményünk szerint az általános iskolai matematikatanitásban a számitástechnika alapjainak az oktatása, a számitógép oktatási segédeszközként való alkalmazása a matematika tanitásának korszerűsitését jelentené: olyan alapok biztosítását, amely alapok birtokában magasabb szintű és hatékonyabb lenne az oktatás. Sajnos ez a szemlélet nem érződik igazán a matematika tantervben, és ugy tünik, hogy erre a tanterv továbbfejlesztésénél (korrekció) sem gondoltak eléggé!

Folyamatábrák készítése szerepel ugyan néhány témakörben, többnyire kiegészítő anyagrészben. Az algoritmikus gondolkodásmód kialakítása, a folyamatok elemi lépésekre bontásának gyakorlása, s ezzel a tudatos tervezés fontossága nem kap kellő hangsulyt az oktatásban. Ugy véljük, hogy azokból lesznek jó programozók, számitástechnikai szakemberek, akik az algoritmikus gondolkodásmód, a számitógépes oktatás talaján nőnek fel.

Vannak, akik kételkednek a matematika és a számitástechnika pozitiv kölcsönhatásában általános iskolai szinten, sőt középiskolai szinten is. Az biztos, hogy csak határozott megközelítéssel, az ötletek és a módszerek kidolgozása, finomítása után (kisérletezéssel) várható egyértelmű, pozitiv eredmény. A matematikaoktatás hatékonysága érdekében szükség van egy - a jelenlegi tantervi keretek között is realizálható - korszerűsités irányába ható, kisérletileg is kipróbált didaktikai megoldásrendszerre.

A fenti hipotézisekből kiindulva kisérletünk célja a matematika és a számitástechnika kedvező kapcsolatainak bemutatása volt az általános iskolai matematikatanításban.

A kisérlet során a következő kérdésekre kerestünk választ:

- Beilleszthetők-e a hagyományos matematika órába a számitástechnikai ismeretek, eszközök?
- Hogyan segítheti a matematikai ismeretek elsajátítását, rögzítését, gyakorlását a számitástechnika? (Hogyan profitálhat a matematika a számitástechnikai ismeretekből?)

- Mi az, ami a matematikán keresztül hatékonyabban megtanítható a számitástechnikából?
- Mennyire motiváló, érdeklődésfelkeltő tényező a számitógép? Egyformán segíti-e megkedveltetni a matematikát a jobbakkal és a gyengébbekkel?
- Hogyan fejleszthető a tanulók algoritmizáló, problémamegoldó képessége?

A kisérlet tárgyaként konkrét matematikai tananyagokat, konkrét eszközöket és konkrét módszereket jelöltünk meg. A kisérlet céljának és a körülményeknek megfelelő kisérleti modellként az Eszterházy Károly Tanárképző Főiskola IV. számú Gyakorló Általános Iskolájának matematika tagozatos (szakosított tantervű) osztályait választottuk.

Megjegyezzük, hogy ezekben az osztályokban kb.: évi 60 órával több matematika óra van. Az alaptantervet és kiegészítő anyagát tanulják részletesebben, mélyebben, számitástechnikai tananyaggal (évi 10 óra) kiegészítve. A tanulók nem válogatottak; vannak kiválók, közepes és gyengébb képességűek is az egyes osztályokban. Az osztályok és az anyagrészek kiválasztásánál arra törekedtünk, hogy a felvetett kérdésekre a tanítás során kielégítő választ, megbizható eredményeket kapjunk.

A rendelkezésünkre álló eszközök közül gyakran alkalmaztuk a számitógépet. Elsősorban egyéni munkaformában dolgoztak a tanulók: algoritmusok, munkalapok, feladatlapok felhasználásával. A kisérlet végén általunk készített feladatlap megoldatásával tájékozódtunk a tanulók tudásszintjéről.

A mérésre szolgáló feladatlapok összeállításánál szem előtt tartottuk a kitűzött oktatási és nevelési célokat. A feladatokat, kérdéseket ugy állítottuk össze, hogy azok felszinre hozzák a tanulók tudását, képességeit, valamint elfogadható eredményt kapjunk az előirt tantervi követelményeknek megfelelő tudásszinteken. Mivel az ismeretek különböző szintűek (ráismerés-, megnevezés-, reprodukálás-, operativ alkalmazás-, megismerő alkalmazásszintje), igy a mérés is alkalmazkodott a szintekhez. Az értékelésnél a 70 % pont felett teljesítőket tekintettük ugy, hogy a megjelölt tudásszinteken elsajátították a témakör anyagát.

Továbbiakban egy 8. osztályban végzett kisérletről számolunk be, melyet kombinatórika, valószínűség, matematikai statisztika c. témakör feldolgozásához kapcsolódva végeztünk.

E témakörből a tanterv 8. osztályban sem ir elő sokkal többet követelményként (még matematika tagozatos osztályban sem), mint 7. osztályban. Igy lehetőség nyilt arra, hogy az anyagrész feldolgozását össze tudtuk kapcsolni a számitástechnikával. Bár a tantervi követelmények kombinatórikából, valószínűségszámitásból, matematikai statisztikából, valamint számitástechnikából külön-külön is eredményesen teljesíthetők, együttes tanításuk azonban (mely ujszerű és szokatlan feldolgozás) a megszerzett ismeretek olyan alkalmazását tette lehetővé, ami minőségileg több volt, mint ami az egyik illetve a másik témakör külön-külön történő ismereteinek az alkalmazása.

A kombinatórika, valószínűség, matematikai statisztika c. anyagrész a jelenlegi alaptanterv szerves kiegészítője (nem önálló témakörként kerül feldolgozásra, hanem a matematika más fejezeteihez kapcsolva foglalkozunk a témához kapcsolódó feladatokkal, ismeretekkel).

A szakosított tantervű osztályban viszont tantervi előirás szerint, önálló anyagként dolgoztuk fel. A tanítás során azt tapasztaltuk, hogy a számitástechnikával történő összekapcsolása olyan tevékenységi formát eredményezett, amely a tanulókat optimális szintű teljesitményre késztette.

A témakör feldolgozásánál a következő oktatási és nevelési célokat tűztük ki:

- Kombinatórikához kapcsolódó ismeretek megszilárdítása, elmélyítése, fogalmak megértetése, összefüggések megláttatása, a feladatok matematikai tartalmának felismertetése.
- Olyan eljárások (algoritmusok) alkalmazása, melyek segítségével az egyszerű kombinatórikai feladatoknál az összes elrendezés meghatározható, illetve az összes elrendezések száma kiszámítható.
- A valószínűség fogalmának elmélyítése.
- Matematikai statisztikai feladatok feldolgozásának előkészítése (numerikus adatok nagyság szerinti rendezése, adatok összegezése).
- Néhány statisztikai függvény értékének kiszámítása.
- A korreláció szemléletes fogalmának bevezetése.
- Az ismeretek alkalmazásának lehetőségei a gyakorlatban.
- A számitógépes feldolgozás szükségessége, előnyeinek tudatosítása.
- A problémamegoldó képesség fejlesztése.
- önálló, kreativ, pontos, algoritmikus gondolkodásra nevelés.
- A gondolkodás aktivizálása és fejlesztése.

A számitástechnikai ismeretek alkalmazása a szóbanforgó témakör feldolgozásakor feltételezte a tantervi követelmények teljesítését számitástechnikából is.

Természetesen nem tértünk ki az összes tanult számitástechnikai ismeret alkalmazására, hanem elsősorban olyan ismereteket használtunk fel, és rendszereztünk, amely ismeretek birtokában a tanulók meg tudták oldani a kitüzött feladatokat.

Az alkalmazott ismeretek és a hozzájuk kapcsolódó tantervi követelmények számitástechnikából a következők voltak:

- Értsék és alkalmazzák a tanulók a számitógéppel segített problémamegoldás lépéseit.
- Tudjanak egyszerű algoritmusokat (folyamatábrákat) készíteni.
- Jártasság szinten ismerjék és tudják kezelni az INPUT, LET, PRINT utasításokat.
- Ismerjék a feltételes-, ugró-, ciklusutasitások működését, lényegét.

A fenti oktatási, nevelési célok, valamint az alkalmazható számitástechnikai ismeretek figyelembevételével a témakört a következő tanítási egységekre bontottuk:

- Az anyagrész feldolgozása során előforduló számitástechnikai ismeretek rendszerezése, ismétlése (1 óra).
- Egyszerű kombinatórikai feladatok megoldása (2 óra).
- összetett kombinatórikus geometriai feladat megoldása (1 óra).
- Ismerkedés a Pascal-háromszöggel (1 óra).
- Kiválasztási, rendezési feladat számitógépes megoldása (numerikus adatokkal), (2 óra).
- A valószínűség fogalma, valószínűségi játékok (3 óra).
- Statisztikai feladatok megoldása (1 óra).
- A korreláció szemléletes fogalma: korrelációs diagramm (1 óra).
- Témazáró dolgozat (feladatlappal) (1 óra).

A tantervi követelményeknek megfelelő tudásszintekhez és az ismeretek alkalmazásához, számonkéréséhez megfelelő feladattipusokat készítettünk:

Tudásszint	Feladattipus
1. Ráismerés:	
- két adathalmaz közötti véletlen kapcsolat- (korreláció)	alternativ feleletválasztásos
2. Megnevezés:	
- statisztikai függvények: átlag, terjedelem, középpont	feleletválasztásos
3. Reprodukálás:	
- a kombinatórikai feladatok matematikai tartalma	kiegészítéses
4. Operativ alkalmazás külső algoritmus szintjén:	
- kombinatórikai (rendezési) feladatok megoldása adott algoritmus alapján	konstruktiv (táblázatkészítés)
- folyamatábra, program utasításainak végrehajtása	
5. Megismerő alkalmazás:	
- valószínűség, valószínűségi játékok	feleletválasztásos konstruktiv
- számtani átlag kiszámítása	rendszerező
- adott utasításokból folyamatábra, program készitése	besoroló kiegészítéses
- adott folyamatábra, program működésének az értelmezése	
- adott folyamatábra kiegészítése, javítása.	

Számitástecnika valamilyen módon a témakör minden óráján előfordult anélkül, hogy erőltettük volna.

A tananyag kombinatórikai feladataihoz jól használható algoritmusokat állítottunk össze, melyeket vagy szöveggel vagy folyamatábrával irtunk le. Ezek az algoritmusok jóval bonyolultabbak voltak azoktól, amelyeket a tanulók önállóan is el tudtak készíteni. Természetesen nem is az volt a cél, hogy a tanulók bonyolult algoritmusok szerkesztésével próbálkozzanak, hanem az, hogy megkeressék segítségükkel a kombinatórikai feladatok összes megoldásait, és eljussanak az operativ alkalmazás szintjére külső algoritmus segítségével (passziv tudás).

A matematikai statisztikai adatok feldolgozásához elkészített numerikus rendezési algoritmust alaposan kielemeztük, ellenőriztük a számitástechnikában alkalmazott módszerrel: felirtuk az algoritmusban szereplő változók neveit, és adatsorral lépésről-lépésre haladva követtük az értékváltozásokat. Örömmel tapasztaltuk, hogy a tanulók érdeklődve csinálták az algoritmus(ok) (folyamatábra) ellenőrzését, ugyanis a számukra nehezebben következő folyamatok (algoritmusok) helyes működése igy igazolódott.

A hibás, hiányos algoritmusokban szintén a táblázatos módszerrel keresték meg, javították a hibát, illetve a hiányos algoritmusokat kiegészitették. Közben egyre többen jutottak el azon tény belátásához, hogy a programirást egy-egy probléma számitógéppel segített megoldásakor meg kell, hogy előzze az algoritmizálás.

A pontosan megfogalmazott, egyértelmű utasításokhoz (algoritmusokhoz) közösen készitettük el a Basic-programját. A satitsztikai feladatok megoldásánál különösen fontosnak tartottuk, hogy használjuk a számitógépet, rámutatva arra, hogy nagy mennyiségű adathalmaz feldolgozásánál (pl.: rendezés, terjedelem-; médián-meghatározás; átlagszámitás, korrelációszámitás) mennyire segitségünkre van, felszabadít bennünket sok mechanikus tevékenység alól.

A valószínűségi játék órájához elkészitett játékprogram másik oldalról is bemutatta a számitógépet: egy kockadobásos játékot szimulált, melynek egyik játékosa a tanuló, másik játékosa a gép volt. A játékosok stratégiájától és a véletlentől egyaránt függött a játék kimenetele.

A tudásszint mérésére szolgáló feladatlapon a matematikai ismeretek számonkérésekor segítő és számonkérő-jelleggel alkalmaztuk a számitástechnikai ismereteket. A témakör utolsó óráján irták meg a tanulók ezt a számonkérő feladatlapot, amelyet A és B változatban készítettünk el.

A tanulók eredményeit un. "nyerspontban" (a rosszul megoldott és kihagyott feladatok értékét nullának vettük) fejeztük ki. Egy feladatlap nyolc (többnyire összetett) feladatot tartalmazott. Hibátlanul megoldott dolgozattal 57 pontot lehetett elérni. Az osztály átlagos teljesitménye 83 % pont volt. A pontadatok szórása ± 6,6 , a relativ szórása 14 %, melyet még kicsinek mondhatunk. Ez a szórásérték az osztály egyenletes teljesítményét mutatja.

Bár maximális pontot (57) egyetlen tanuló sem ért el, de az átlag fölött az osztály 65 %-a teljesített. A feladatlap első négy feladata kombinatórikai témájú volt, melyeket a tanulók 83 %-pont - 88 %-pont teljesiőtménnyel oldottak meg. Ezek többségét a feladatlapon rögzített, kész algoritmus segítségével készítették el. Nehezebbnek bizonyult az ötödik feladat, amelyben kész programot kellett elemezni (62 % pont volt a teljesítmény). Hasonló teljesítményű volt a hatodik feladat megoldása is, mely - gondolkodtatóbb lévén - több tanulót nehézségek elé állított. Néhány adat átlagát az osztály 58 %-a tudta önállóan kiszámitani. Meggyőződésünk, hogy a problémát megoldó algoritmus (folyamatábra) vagy program sokat segített volna.

Kikértük a tanulók véleményét is a kisérletről néhány kérdést tartalmazó kérdőiven: 84 százalékuk érdekesnek tartotta a kisérletet. 72 százalékukat a számitástechnika jól segítette a matematikai problémák megoldásában. A folyamatábrákat 56 százalékuk tudta felhasználni a kombinatórikai feladatoknál. A tanulók 76 százaléka szerint nem volt nehéz adott folyamatábra elemzése, kiegészítése. 84 százalékuk nyilatkozott ugy, hogy adott utasításszimbólumokból folyamatábra megszerkesztése könnyű volt. A témazáró feladatlap megoldásánál segítettek az algoritmusok (folyamatábrák). Ez volt a véleménye a tanulók 88 százalékának. Az osztály tanulóinak 68 százaléka szivesen találkozna más alkalommal is a tananyag egy-egy témakörének hasonló feldolgozásával. 24 százaléka nem tudott dönteni a kérdéssel kapcsolatban.

Ugy gondoljuk, hogy akár a dolgozatok eredményeit tekintjük, akár a tanulók véleményét, a számadatok reálisak (nem szépítettek).

Összefoglalva: A hagyományos matematikaórába a számitástechnika alapjai, eszközei eredményesen beilleszthetők. A számitástechnika segítette a matematikai ismeretek rögzítését, gyakorlását, elmélyítését. A feldolgozásmód (matematika, számitástechnika együttes alkalmazása) minőségi szempontból többet jelentett a tanulóknak, mintha a számitástechnika nélkül, esetleg több matematikai feladatot oldottunk volna meg. Azt tapasztaltuk, hogy erősödött a tanulókban az algoritmikus gondokodásmód, amely a matematikán keresztül hatékonyan kialakítható, megtanítható. A számitógép a gyerekek többségénél motiváló, érdeklődéstkeltő tényező volt.

Mivel nyolcadik osztályról lévén szó, nem terveztünk arról, hogy hogyan lépnénk tovább? Ugy véljük, hogy ezek a tanulók rendelkeznek olyan matematikai és számitástechnikai alapokkal, hogy a középiskola által állított korszerű követelményeknek is eleget tudnak tenni.

IRODALOM

[1] Kiegészitő tantervi tervezet az általános iskolai matematika szakosított tantervű 5-8. osztályok részére (Kézirat: Balogh Viktoria és Balázs László 1980, 1983.)

[2] dr. Simonovits Miklós, Tanterv-vázlatok a Számitástechnika c. tankönyvhöz. A Matematika Tanitása, 1987/5.

[3] Számitógépek - számitástechnika az általános iskolák matematika szakosított osztályaiban. Módszertani útmutató az 5-8. osztályokhoz (Kézirat: Balogh Viktoria 1985., 1986).

[4] Török Turul, Matematika és számitástechnika A Matematika Tanítása.

BALOGH VIKTÓRIA

ÉRTELMI KÉPESSÉGEK ÖRÖKLETESEK VAGY KÖRNYEZETI HATÁSRA FEJLŐDNEK

ABSTRACTO: *(Intelektaj kapabloj estas hereditaj aŭ elformeblaj) La artikolo temas pri intelektaj kapabloj: ĉu tiuj estas elformeblaj aŭ hereditaj? Tiucele mi prezentas en Hungario funkciantan eksperimenton de matematikaj fakklasoj kaj en la bulgara ĉefurbo funkciigatan Sugestopedio-Instituton kie oni preferas du studobjektojn - la lingvoinstruadon kaj matematikon. Pri nova instrumetodo temis ankaŭ dum la konferenco en Sofio. - Simila eksperimento okazas en bazlernejo de Budaörs pere de la lingvo Esperanto.*

Nem tudjuk pontosan, hogy az értelmi képességek milyen mértékben határozzák meg az öröklési tényezők és mennyire a környezeti hatások. Az iskolai eltéréseket, különbözőségeket egyszerűbb az öröklés rovására irni, mint annak utánanyomozni, hogy merre vezetnek a szövevényes társadalmi gyökerei.

Ma egyre inkább a képességek alakíthatóságának, fejlesztésének kérdése kerül előtérbe, ebben folynak kisérletek a világ több országában.

J.B. Watson amerikai, V. Turcsenko szovjet pszichológus, C.A. Helvetius francia, A. Adler osztrák és Szunugi Szuzuki japán pszichológus optimista irányzata szerint a kisgyermekkori oktatás-nevelés döntő jelentőségű. *Az agy fejlődéséhez* nemcsak fizikai táplálék, hanem *a korai stimuláció, igénybevétel is szükséges.* Háromtól hatéves korig potenciálisan minden gyermek zseni. Az óvodáskor előtt is hatalmas tanulási kapacitásuk van, amelyet sokkal jobban ki lehetne használni. Már egytől négyéves korig valóságos információáradat éri a kisgyermeket. A gyermek különösen jól alkalmazkodik a környezeti hatásokhoz. Sok tulajdonság kedvezőbben alakítható bennük, mint a felnőttekben.

J.B. Watson öntudatosan hangoztatta, ha kapna egy tucat egészséges csecsemőt, tetszés szerint nevelne belőlük akár tudósokat, akár bűnözőket. A kiváló szovjet pszichológus *V. Turcsenko szerint:* "Helyesebb, ha nem azt mondjuk, hogy ritkán szülnek, hanem azt, hogy *ritkán nevelnek zsenit.*" Megállapításaik is azt fejezik ki, hogy a kisgyermekek agyának kapacitását nem használjuk ki kellőképpen. A hátrányos környezeti feltételek az első hat-tiz évben nagy kárt okozhatnak a képességek fejlődésében. A későbbi fejlődési szakaszokban nehéz, sőt csaknem lehetetlen pótolni azt, amit ebben az időben elmulasztottak a gyermekek képességeinek fejlesztésében.

Egy amerikai pszichológus nő Mayer Pines szerint millió és millió gyermek károsodik helyrehozhatatlanul annak következtében, hogy a kritikus életkorban - *a születéstől hatéves korukig - nem ösztönzik kellően* intellektusuk fejlődését. Több pszichológiai kisérlet és megfigyelés igazolja, hogy az emberi agy kapacitása, képességeinek igénybevétele legfeljebb 3 %-os, s ez rendkivül rossz hatásfok!

Azt szokták mondani, hogy a kisgyermekek még nem elég érettek arra, hogy tanuljanak. Erre azt a véleményt fogalmazták meg a téma kutatói, hogy a felnőttek (szülők és pedagógusok) nem képzettek arra, hogy tanítsák gyermekeiket, sőt sajnálják, féltik a "terheléstől", a kifáradástól a gyermekeket. - Pedig, ha eleget akarunk tenni a jövő követelményeinek, minnél fiatalabb korban "kézbe kell venni" a gyermekeket, hogy képességeik megfelelő szinten alakuljanak. A következőkben szeretnék ismertetni hazai és külföldi kisérleteket, intézményesen is megszervezett képességfejlesztést szolgáló pedagógiai eljárásokat, módszereket.

I.

Kisérletek a matematikai tehetség kialakítására

Hosszú éveken át a matematikai tehetséggondozás volt a kutatási témám.

1968-tól az általános iskolai szakositott tantervű 7.-8. *osztályok szervezése*, tananyagának összeállítása, majd a gyakorlati kipróbálás után a tankönyveinek és tanári kézikönyvének megírása volt a feladatom. E munkában Hubai Lászlóné - Eger város akkori szakfelügyelője, - és Heves megyében (Hatvan, Gyöngyös, Füzesabony, Heves I. és Eger IV.sz iskolák) tanárai adtak segítséget. Majd a tapasztalatok nyomán országosan is kiszélesedett a szakositott osztályok hálózata. Egerben kaptak felkészítést a kollégák a kb. 54 iskolában kialakított tehetséggondozó munkához.

Már akkor is tapasztaltuk, hogy *bár nem csupa született matematikus zseni* került az osztályokba, - mert ilyen kiválogatásra soha nem volt lehetőség - *mégis az intenzivebb foglalkozás, a magasabb heti óraszám* , a tananyag kiválasztása és feldolgozási módszere sok értelmes, jól gondolkodó, problémákat könnyen megoldó tanulókat bocsátott ki az általános iskolákból, akik a középiskolákban, sőt az egyetemeken is kiemelkedően szerepeltek!

A szakosított osztályok szervezésének *ujabb formája 1980-ban merült fel*, azaz korábban kezdjük a tehetség-gondozást; *már az 5. osztályokban* 4 éven át a magasabb óraszámmal és a tananyag kiválasztással nagyobb hatás érje a tanulókat a matematikai gondolkodtatásban. Ennek szervezését megyénkben Balázs László, akkori vezető szakfelügyelő végezte (Heves II.sz. Erdőtelek, Eger VII. és IV. sz. iskolákban) amelyekhez tantervek, tanári útmutatók, feladatgyüjtemények készültek és a kisérletező kartársak által kipróbált témazáró felmérőlapok segítették és előkészítették az országos bevezetést. Ma már több mint 40 iskola vállalkozott a szervezésre, a feltételek megteremtésére, a számitógépek kialakítására és természetesen a tanári felkészülést sem lehetett elkerülni.

Az eredmények még szembetűnőbbek ezekben az osztályokban, amelyet elsősorban mindig *az intenzivebb foglalkozásnak, a tananyag és feladatok minőségének tudtuk elkönyvelni*, - mert a "született zsenik" összegyüjtésére most sem volt lehetőség, - hiszen a város iskolái nem szivesen váltak volna meg a körzetükből kikerülő tehetségektől! - Éveken át felmérésekkel, grafikonokkal elemeztük a tanulók teljesítményét, a képességeik fokozatos fejlődését. (Korábbi években erről már adtunk elemző dolgozatot a "Tudományos közlemények" c. kötetekben).

Ma már *kiszélesedett a kisérlet az alsótagozat irányába is*. Igy már 3.-4. osztályokban előkészítést kapnak az érdeklődő tanulók matematika-szakkörökben, illetve heti plusz 2 órában jól szerkesztett, gondolkodást fejlesztő feladatokkal. Ezzel készülnek a tagozatos matematikai osztályok magasabb teljesítéseire.

A *szegedi Radnóti Gimnázium kisérletező tanára* Kosztolányi József - 1987-től az általános iskolák tagozatos 7.-8. osztályosait, illetve ma már az 5. osztályosait egységesen először 6 osztályos, illetve ma már 8 osztályos gimnáziumi keretben kivánják matematikára oktatni, - és ezzel az általános iskolai tagozatos matematikából 10 éven át tartó képzés, jól kiépített képességfejlesztés segíti majd a tehetségek kibontakozását.

II.

Bolgár Nevelési Intézet Szófiában

(Szuggesztopediai konferencia 1989. dec. 12-14.)

1.

A kapcsolat 1988. novemberben kezdődött a szófiai Szuggesztopdiai Intézettel, amikor Egerben, a Főiskola Matematika Tanszékén a Bolyai János Matematikai Társulat megyei tagozata szervezésében matematika-módszertani konferenciát tartottunk. A konferenciára külföldi vendégek is érkeztek: - NDK, Csehszlovákia és Bulgáriából. Szófiából két kolléganő - egy orvosnő és egy matematikusnő - jelentkezett. Ekkor ismertették az intézetükben folyó munkát, - amelyet akkor igazán nem értettük, hogy a kisérletükben a matematikának - *a természet matematikának* - mi a szerepe? Sok kérdés merült fel: Mi a tanterve? Mi a kisérlet célja? Tehetségképzés? Specialisták képzése vagy az emberi képességek önálló kibontakozása? -

A másik kisérleti, kiemelt tantárgyuk az "idegen nyelvek tanítása", - *a többnyelvűségre való nevelés*, - ezt megértettük előadásukból és a két tárgy kölcsönhatásáról is volt elképzelésünk.

Részletesebben megismerhettem a szófiai intézet munkáját, feladatát az 1989. december 12-14 között megrendezett konferencián. 100 résztvevője volt a konferenciának - és ezen belül közel 20 külföldi vendég Dániából, NDK-ból, Japánból, Luxemburgból, Lengyelországból, Szovjetunióból és én Magyarországról. A résztvevők orvosok, pszichológusok, szociológusok, pedagógusok és a szaktárgyak (matematika, nyelvoktatás, stb.) szakemberei voltak. összesen 47 előadás illetve tervezett "hozzászólás-jellegű" előadás hangzott el.

2.

A Szuggesztopediai Intézet - 15 éve - egyrészt *nyelvtanfolyamokat tart* felnőtteknek (orvosoknak, mérnököknek, stb.) és nyáridőben középiskolásoknak. Erről előadások nem voltak, de video-filmet láttunk a nyelvoktatásról, amely "technikai segédlettel" és "lazított" helyzetben zajlott! Másik feladata az Intézetnek, hogy *általános iskolában irányit oktatási kisérletet*. Az előadások ezekről az iskolai kisérletekről és azok elméletéről szóltak.

A szuggesztopedia oktatásnál jelentkező igények:

- minnél hatékonyabb és érdekes oktatás legyen az iskolában,
- rövid idő alatt elérni a jó eredményeket,
- a tanulókat arra képezni, hogy minnél hosszabb időre képesek legyenek az ismereteiket megőrizni, azaz tartós ismereteket szerezzenek. Ez a képesség nem adottság; de képezhető képesség.

Két tantárgy oktatása kiemelt a kisérletben:

- a nyelvek (anyanyelv és idegennyelvek: bolgár, orosz, angol, francia, német, stb.)
- a természetmatematika.

A nyelvoktatás sikere érdekében - a matematika eszközjellegű a logikája, a környezet és valóság leirásával; ugyanilyen szerepet kapnak a *játék, a zene, a torna,* stb. Az idegennyelven való társalgás, feltételezi az ötletességet, a ritmus, a jó zenei hallás stb. fejlettségét!

A szófiai Szuggesztopediai Intézet működésétől kezdve szoros kapcsolatban van az Orvosegyetem Idegrendszerrel foglalkozó Osztályával, az Orvos Akadémiával - elméletüket alkalmazzák a gyógyászatban, tanulásban, zenében, sportban, - amelyet más-más módszerekkel kipróbálnak: a változatosság, fokozatosság, ismétlés az oktatásban, - külső - vagy önszuggesztió, hipnózis, akupunktura stb. a gyógyászatban. (Elmondták, hogy ezek az eljárások már a 18. században ismertek voltak - francia szerzőre hivatkozott az előadó!) Az egyén szellemi fejlődésére minnél korábban hatással kell lenni, - s ha 3 éves koráig nem kapta meg a gyermek a kellő fejlesztő hatást, utána bármely kulturát kap, már nem éri el azt a szintet, amelyre képes lenne, - ehhez biológiai okok is közrejátszanak! -

3.

A konferencián az orvosok a személyiségzavarok elhárításáról és az egyének rehabilitásáról szóltak az előadásaikban.
Az Orvos Akadémiáról jött előadók (V. Milev és L. Genčev professzor) arról szóltak, hogy az agyat ne csak mint anyagot tekintsük, hanem annak képességeinek fejlesztését is kell vizsgálni, pl. az agy ismeretmegőrző-képessége nem egyéni adottság, de az egyén formálhatja, fejlesztheti külső segítséggel. Ehhez szükséges a pedagógiai eljárások megkeresése. *A szovjet orvos professzor* önszuggesztiós gyakorlatot mutatott be a hallgatók körében, hogyan lehet a tanulókat a tanulásra hangolni, és befogadóképességüket fokozni.

A pszichológusok az iskolai környezetben az egyéniségek megfigyeléséről, az emberi agyra gyakorolt hatásokról tartottak előadást. Az iskolai oktatásnál az értelmi és érzelmi hatásoknak egyensulyban kell lenni, - mert az agy jobb-félrészére hat a gondolkodtatás, a tanulás, az értelmi képességek fejlesztése - az agy bal-félrészre hatnak az érzelmek. Ezért ugy kell tanítani, hogy az értelmi és érzelmi hatások az agyat egyenletesen terheljék, - mert ekkor lesz az egyén egyensulyban! A játékosságnak, az érdekes feldolgozásnak kell érvényesülni a tanulás során.

4.

Nyelvoktatás sikeres oktatásának kisérletéről többen tartottak előadást!

1. *Tereskova (Moskva):* az angol nyelv tanításában végzett kisérletét ismertette! - A nyelvoktatás személyiségfejlesztő hatásáról, - a 2.-3. idegennyelv pozitiv és negativ interferenciájáról szólt. A nyelvtanulás hatással van az anyanyelv pontosabb megismerésére! örömmel reagált az én előadásomra, mert ő is hasonlókat épitett be tankönyvébe, de ő nem tudta ezt matematikus szemlélettel indokolni.

2. *Balogh Viktória (Eger):* Előadásomban a matematikai fogalmak és nyelvtanulás kapcsolatáról szóltam. A halmazok, a nyitott mondatok, a halmazműveletek - matematikai logika - stb. matematikai gondolkodásmódra támaszkodva - az a megfigyelésem, hogy a tanulók képesek eligazodni a feldolgozott szóanyagban, mert legfontosabbak a gyüjtőnevek ismerete, majd ezen belül a konkrét elemek nevének megismerése: tárgyak, virágok, állatok, ruházat, butorok, stb. Ez az elrendezés segiti a nyelvtani feladatok azonnali gyakorlását, és a szódefiniciók felismerését, - amelyek gyakran szükségszerűen megjelennek beszédünkben!

Mondatmodellekkel a tanuló azonnal beszélni kezd, önállóan alkotja a mondatokat, saját közölnivalóját fogalmazza meg, – nem pedig kész szövegeket olvas – fordit, nem kész szövegeket memorizál! Minden szófajtára, nyelvtani elemre alkalmazható a halmazokban való elrendezés és tájékozódás. Megfigyeléseimet az eszperantó nyelvtanítása során végeztem!

3. *V. Volfgang Lipcsei* Karl-Marx Egyetem tanára az orosz és angol nyelvoktatás terén végzett kisérleteiről tartott ismertetőt – amelyben különböző kérdéseket elemzett: kell-e alkalmazkodni az osztályhoz, milyen a belső differenciáltság az osztályban, a gyermekek maguk tudják elhelyezni magukat az intelligencia szinteken; csoportokban tanulnak az azonos osztály tanulói, amelyet a tanulók temperamentuma, gondolkodási tipusa, előképzettsége a nyelvtanulásban stb. határoz meg.

4. *Eigil Nielsen*, – dán orvospszichológus – főleg a beteg gyermekek beszédnevelésével foglalkozott – az általános nyelvoktatás kérdését elemezte sok elméleti szakembert idézve.

Nagyon *sok hozzászóló előadás* emelt ki egy-egy lényeges megfigyelést, kisérletet:

- zenei hallásnevelés hatása a nyelvtanulásra
- játék szerepe az idegen nyelvtanulásban
- a kiejtés, hangsuly a tanári oldalról
- az irás mint fontos kódolási rendszer
- tankönyvek szerepe, – szókészlet, nyelvtan szerepe, stb.

5.

A matematika oktatás a valósághoz közelit a kisérletekben, mivel a matematika a valóságot irja le, a valóság formáit és összefüggéseit fogalmazza meg általánosan, – ezért gondolkodás módja alkalmazható más tantárgyak tanulásában is.

1. *Nataša Mačko, kievi* tanárnő arról folytat kisérletet, hogyan lehet a matematikát rajzosan bemutatni – formák, mozaikok, parkettázás, tükrözés, és más geometriai transzformációk átdarabolás stb. jelenik meg feladatlapjain, amellyel a tanulók szemléletét, kreativitását fejleszti. Varga Tamásra is hivatkozott kisérletének kimunkálásához, amelyről 2 kötetes tanári kézikönyve elkészült.

2. *Setsuko Hazama* japán kolléganő: Oszakából érkezett, – hasonlóan a valóság formáit vizsgálja – elsősorban a térbeli 3 dimenziós, alakzatokat, azok ábrázolási módját, modelleket, testek hálóját készitik el, – csonkolt testekről készítenek számitási feladatokat. Az 1-6. osztályhoz elkészített szép, szines tankönyveikben sok számolás, geometriai formák láthatók.

3. *Petko Arnaŭdov (házaspár):* a bolgár Pazarĝik városból a koordinátarendszerben végzett ábrázolásokat mutatták be, – a gyermekek könnyedén tüznek ki sok-sok pontot, majd ezeket összekötve különböző figárák rajza formálódik ki! Ez a gyakorlás segíti a számitógépekhez a rajzi programok készitését, – hisz a sík szemléletében az arányok, méretek meglátásban kiemelten alakul a tanulók képessége. Ezek a rajzok is a valóságot ábrázolják!

4. *Sofia Dimitrova:* A szófiai intézet vezetője, matematikus kolléganő előadásában elmondta, hogy – a matematika oktatás sokszor unalmas a tanulóknak, – ezért érzelmileg kell a gyermekeket megfogni, s ezt a matematikai logika segiti!

Ismertette a tantervi anyagot: – és a felméréseinek eredményét! Pl.: 1. osztályban legfontosabb a számfogalom – de csak 20-ig! Az összeadás, kivonás, esetleg mennyiségek 2-szerezése, 3-szorozása stb. műveletek alapos ismerete. Műveletláncokat, műveletsorokat számolnak – ezekhez szöveges feladatok is kapcsolódnak. Legfontosabb a művelet technikája.

A tankönyveikben sok feladat található a differenciált foglalkozáshoz. Az analóg feladatokkal segítik a gondolkodás strukturálását. - Kisérleteiknek eredménye 1 jeggyel jobb, mint a más iskolák kontroll-csoportjainál, - pedig csak heti 2 órában tanitják a matematikát.

Általában a kisérleti osztályok tanterve az állami tanterv - segédanyagaik (tankönyvek, munkalapok) is az állami, egységesen alkalmazott kiadványok. - Normál iskolában végzik a szuggesztopediai oktatást az Intézet irányításával. Az osztály gyengébb tanulóinak külön foglalkozásokat szerveznek! (Felzárkóztatás céllal). A napi foglalkozások az 1. osztályban 4 órások.

Óratervük hetenként:

idegen nyelv	9 óra	(Lehet, hogy több mint 19
matematika	2 óra	óra a heti óraszám - de
bolgár nyelv	2 óra	ezek a tárgyak tartoznak
ének-zene	2 óra	a kisérletbe.)
torna-játék	4 óra	

Az oktatás azonban 2-3 nyelven zajlik! Elmondták azt is, hogy az ő kisérletükben

1. osztályban	az	1.-2.	osztály anyagát
2. osztályban	a	3.	osztály anyagát
3. osztályban	a	4.-5.	osztály anyagát
4. osztályban	az	5.-6.	osztály anyagát

dolgozzák fel pl. matematikából és egyéb tantárgyak anyagából!

Ehhez kellett megkeresniök a módszereket, hogy valóban rövid idő alatt, érdekesen és hatékonyan dolgozzák fel a tananyagot és ezzel a tanulók tartós, alkalmazható ismereteket szerezzenek!

III.

Magyarországi kisérletek

Hasonló intézet működéséről nincs ismeretem. Bizonyára vannak gépekkel felszerelt *nyelvilaboratóriumok*, - de orvospszichológusokkal irányított "agyikapacitást kiterjesztő" vizsgálatokról nincs népszerűsített kisérlet, irodalom.

Tehetségképzés Eszperantó által

1989 szeptembertől Budaörsön kisérleti 1. osztály működik az általános iskolában 22 hatéves gyermekekkel Polgár László pszichopedagógus nevelési koncepciója szerint. Arról a kollégáról van szó, akinek 3 leánya rendszeresen győzelmet arat a sakk-olimpiádon. A leányok eredménye annak az apai nevelési eljárásnak köszönhető, amely arra alapozott, hogy "minden ember képes magasszintű eredményeket elérni az élet valamilyen területén" - feltételezve azt, hogy

1. elég korán kezdik vele a foglalkozást,
2. elég érdekes ez a tevékenység,
3. és viszonylagosan csak kevés területre korlátozódik.

A budaörsi osztályban két ilyen területet választottak:

1. a nyelvi (anyanyelvi- és idegennyelvi) képességfejlesztést
2. és a matematikát.

E két terület előnyberészesítésének fő oka:

- egyrészt a nyelvi kommunikáció az emberi élet általános igénye, mivel a többnyelvüség nem elkerülhető sok foglalkozásnál

- másrészt a matematika az a nyelv, amely a természetet leirja, - tehát magasszintű ismereteivel sok előnyt ad sok szakterületnek!

Az osztályban a munka "iskola-otthon" rendszerben történik. Ez azt jelenti, hogy a gyerekek délelőtt- és délután tanulnak, és a két oktatási periódus között pihennek, sportolnak. Természetesen háromszori étkezést kapnak naponta. Délelőtt magyarul tanulnak és délután másik nyelven, - amelynek formája nem nyelvtannal alátámasztott nyelvtanulás, hanem beszédkörnyezetben élni, séta, kirándulás közben ismerik meg a beszéd szituációkat. Az első, alapozó idegen nyelv ebben az osztályban az eszperantó.

Az osztályban két tanító látja el az oktatást. Az egyik délelőtt, a másik délután tanit, - és egy harmadik nevelő pedig azokkal a gyermekekkel foglalkozik, akiknek nehézségeik vannak a tanulásban. Az osztályban lengyel tanitónő vállalta az eszperantó nyelv oktatását. A tanítók kommunikációs nyelve is az eszperantó, - a következő tanévekben is, amikor más nyelvű nevelők is (pl. angol nyelvtanár) bekapcsolódnak a kisérletbe.

A matematika munkalapjaik összeállításához, illetve "eszperantósításához" nyujtottam segítséget, mivel a tantárgyak, igy a matematika oktatásában is érvényesül a kétnyelvüség. - Ugyanazt értik a feladatmegoldásra felszólitásoknál a tanulók akár magyarul, akár eszperantóul kapják az utasitást, pl.:

Folytasd a sorozatot!

Daŭrigu la serion!

A kisérlet anyagi támogatását a Magyar Eszperantó Szövetség Gazdasági Csoportja biztosítja, akik *önálló alapítványt hoztak létre* "Talentó" cimen.

Az alapító oklevél a következő célokat jelöli:

- magasszintű tehetségnevelés a kisgyermekek körében
- az anyanyelvi kultura ápolása
- Eszperantó nyelvismeret kiszélesítése és ennek a művelődési területeken való alkalmazása
- az idegen nyelvek magasszintű oktatása
- magasszintű oktatása a matematikának és a természettudományoknak
- a természetvédelem és az egészséges életmód gyakorlati megvalósítására nevelés: "Egész világban gondolkodni, és helyben cselekedni!"

A budaőrsi kisérletre felfigyelt *az ujság és a televizió* is! A Népszabadság ujságirója is és a TV 2 műsora is részletesen ismertette, bemutatta az eszperantós osztály matematika óráját, a japán tanárok által megismertetett "szorobán" - számolóeszköz használatát. A feladatok jelölése és a tanulók válasza eszperantóul zajlott!

A gyermekek *a számolóeszköz segítségével megtanulják a fejbeni számolás technikáját*, s így már 1. osztályos korukban olyan magas számkörben számolnak fejben is hibátlanul, amelyre hasonló korú társaik - más 1. osztályokban - nem juthatnak el. Ebben az 1. osztályban folyó kisérlet nem csupán az eszperantó nyelv sikeres megtanulása az értékelhető eredmény, hanem matematikában is kiemelkedő az eredményük a fejszámolás magasszintű elsajátításában. A fejszámolást a számolóeszközön végzett "mozgás" segíti, - maguk előtt látva azt, - szinte "leolvassák a gépről" a műveleti eredményeket. Még külön kiemelhető tény, hogy ezek a gyermekek, ehhez az eredményhez nem fáradsággal, hanem játékosan, jókedvű tevékenységgel jutottak el! - Pedig a gyermekek nem kiválogatottak, hanem az iskola egyik tanulócsoportja - s az ő részvételükkel próbálták ki a nevelők a "kisérleti" tantervet, illetve oktatási módszereket, nevelési-oktatási eljárásokat az értelmi képességek fejleszthetőségében vetett hitük szerint!

IRODALOM

[1] Lukács András, Geniuloj pere de Esperanto, Budapeŝto Infermilo, 20, No 7-8 (1989), 13-14.

[2] Polgár László, Eduki eblas ankaŭ tiel, Fokuso (internaciakomputado) 1987/3, 9-19.

[3] Balogh Viktória, Szuggesztopedia konferencia, Szófia (kézirat), 1989.

[4] Gábossy Éva, Szorobán óra a budaőrsi eszperantós osztályban.
Ha lesz alapítvány, kifejlődhet a tehetség
Népszabadság 1990. április 11. 9.oldal

MARGA SCHMIDT

ZUM LÖSEN VON SACH- UND ANWENDUNGSAUFGABEN IM UNTERRICHT
(Forschungsbericht)

ABSTRACT: *Die Forschung betrachtet als eine der wichtigsten Zielsehungen, daß die Schüler für die Lösung der Aufgaben aktivisiert werden. In dieser Zusammenhang zeigt die Arbeit konkrete Beispiele.*
Sie gibt eine Zusammenfassung solchen allgemeingültigen Prinzipien, die bei der Lösung der Aufgaben anwenden werden können, wie zuß:

- *Darstellung und Analisierung der Aufgabe*
- *Plan für Aufgabe, Zusammenstellung der Pläne*
- *Durchführung der Lösung*
- *Kontrolle*

In verschiedenen Schulen in Erfurt wurden diese Verfahren bei Methodologie eingeführt, nachdem sie von den Fachlehrern abgestimmt wurden.
Die Zusammenfassung der Erfahrungen wird die Aufgabe des nächstes Jahres sein.

Im Heft XVIII/11 dieser Zeitschrift konnten wir bereits über unsere Forschungsarbeit berichten. Dort stellten wir ausführlich die Ergebnisse unserer Praxisanalyse zum Forschungsgegenstand "Aktivierung von geistigen Schülertätigkeiten" dar. Diese Ergebnisse charakterisierten zum einen den derzeitigen Stand und machten gleichzeitig

Reserven zur Erhöhung der geistigen Aktivität sichtbar. Diese Reserven auszuschöpfen, den konkreten Mathematikunterricht unter Beachtung aufgezeigter Schwerpunkte bewußt zu gestalten, entsprechende Hinweise für Lehrer auszuarbeiten, darin bestanden und bestehen die zu lösenden Forschungsaufgaben.

Im nachfolgenden möchte ich für einen Schwerpunkt - "Das Arbeiten mit Aufgaben" - unsere weiteren Überlegungen darlegen. Wie im letzten Bericht ausgeführt, interessierten uns bzgl. dieses Schwerpunktes insbesondere folgende Fragen:

1. Welches methodische Vorgehen bewährt sich beim Aufgabenlösen, welcher Zusammenhang besteht zur Aktivität?
2. Welchen Einfluß übt die Aufgabenstellung (als objektiv Vorgegebenes und als durch den Lehrer methodisch gebrochene Vorgabe) auf die Aktivität der Schüler aus?
3. Wie muß die Analysephase gestaltet werden, um die Schülertätigkeit bestmöglichst zu aktivieren?
4. Wie ist unter dem Aspekt der Aktivierungsreserve die Phase der Rückschau zu gestalten?

Wir können feststellen:

Aufgaben haben in der math. Unterweisung schon immer eine große Rolle gespielt. Gehört doch eine weitgehende Befähigung des Schülers zum Lösen bestimmter Aufgaben zum Zielbereich des Mathematikunterrichts und leistet doch das Aufgabenlösen als Mittel für die Herausbildung von Kenntnissen, Fähingkeiten und Fertigkeiten hervorragende Dienste.

Im Zentrum der methodischen Grundkonzeption des Mathematikunterrichts, die in den letzten Jahren in den neuen Lehrplänen, Lehrbüchern umgesetzt wird, stehen deshalb Fragen der Aufgabenauswahl und -anordnung, des Ingangsetzen und -haltens der Aufgabenbearbeitung durch möglichst jeden Schüler, des zweckmäßigen Anleitens und Kontrollierens der

dabei vom Schüler vollzogenen Tätigkeiten und des Auswertens und Gewinnens allgemeiner Erfahrungen.
Alle Schüler zu aktiver geistiger Tätigkeit, zu Selbständigkeit und zu elementaren Schöpfertum zu befähigen, stezt sowohl eine gute Aufgabenauswahl und -anordnung ebenso wie eine zweckmäßige Gestaltung des Aufgabenlösens voraus. Wenn also das Lösen einer Aufgabe vorgeführt wird (vom Lehrer oder von einzelnen Schülern) oder in einem kurzschrittigen Unterrichtsgespräch (bei dem trotz richtiger Teilantworten der Schüler der gesamte Lösungsweg nicht mehr überschaubar bleibt) oder in direkter Analogie zu einem vorliegenden Muster (reines Nachmachen) geschieht, gehen wichtige Potenzen von Selbständigkeit und geistiger Aktivität verloren.
Das aber gerade das im Mathematikunterricht noch zu häufig anzutreffen ist, belegten unsere Praxisanalysen. Wollen wir also Fortschritte auf dem Gebiet der Erhöhung der geistigen Aktivität im Mathematikunterricht erzielen, so geht es um bewußtes Verhindern dieser festgestellten Mängel!

<u>Zum Aufgabenlösungsprozeß</u>:

Der Aufgabenlösungsprozeß stellt einen speziellen Problemlösungsprozeß dar und orientiert sich an folgendem allgemeinen Modell:

1. Analyse der Aufgabe
2. Analyse der Mittel
3. Durchführung der Lösung
4. Rückschau

Speziell bei Sach- und Anwendungsaufgaben ergeben sich nach weitere Hinweise für die einzelnen Phasen:

Modell	Spezielle Teilschritte
1. Analyse der Aufgabe	- Inhaltliches Verstehen der Aufgabenstellung, des Aufgabentextes - Wiedergeben des Aufgabeninhaltes mit eigenen Worten, eventuelles Klären des Sachverhaltes - Analysieren des Textes, vorkommende Größen (Zahlen u. Variable) werden erkannt und benannt, Zusammenhänge zwischen den Größen werden erkannt und vorteilhaft aufgeschrieben (Skizze, Tabelle, Stichworte ...) - Trennen von Gegebenem und Gesuchtem
2. Analyse der Mittel	- Suchen nach weiteren Zusammenhängen, Orientierung an Signalwörtern, speziell nach Äquivalenzen suchen - Suchen nach Formeln, in denen die gegebenen bzw. gesuchten Größen vorkommen - Eventuelles Ableiten von Teilaufgaben, wenn noch weitere Unbekannte auftreten - Eventuelles Umwandeln der Maßeinheiten - Verarbeiten zum mathematischen Ansatz (Methoden des Vorwärts- bzw. Rückwärtsarbeitens anwenden) - Abschätzen des Ergebnisses

3. <u>Durchführung der Lösung</u>	- Realisieren der Lösungsidee, Auswählen geeigneter mathematischer Verfahren, Lösung ermitteln - Deuten des mathematischen Resultats für den Sachverhalt - Vergleichen mit der Schätzung, mit den Erfahrungen der Schüler
4. <u>Rückschau</u>	- Probe am Text - Formulieren des Antwortsatzes - Rückbesinnen auf beschrittenen Lösungsweg, Bewußtmachen der mit Erfolg angewendeten Vorgehensweise zum Finden des Ansatzes - Versuchen, die Mittel, die zum Ziel führten, zu verallgemeinern - Diskutieren von Möglichkeiten der Übertragung der Vorgehensweisen, Formulieren von Aufgaben, auf die der Lösungsweg auch anwendbar wäre - Werten des Ergebnisses in erzieherischer Weise

Für unser Anliegen bieten insbesondere die ersten beiden und die vierte Phase Potenzen zur Aktivierung der Schülertätigkeiten. Dazu seien nachfolgend einige Ausführungen gemacht.

<u>1. Zu den Phasen 1 und 2</u>

<u>A) Aktivierung durch strategiebewußtes Arbeiten</u>

Wir haben bereits festgestellt, daß Vorführen von Lösungen kaum einen Beitrag zur Befähigung aller Schüler zum selbständigen Problemlösen leistet. Auch das Problemlösen kann nur im Prozeß der Tätigkeit erlernt werden. Ein erfolgversprechender Weg besteht darin, die Schüler zum selbständigen Lösen von Problemen über den Weg "Versuch - Irrtum" anzuregen. Doch auch dieser Weg ist zu uneffektiv! Ein effektiverer Weg ist darin zu sehen, die Schüler im Prozeß des Problemlösens mit Lösungsstrategien bekannt zu machen, diese Strategien zu vermitteln und durch die Schüler mehrfach anwenden zu lassen!

Jedes Problem enthält gewisse Informationen über "Startgrößen" und "Zielgrößen", manchmal auch über auszuführende Operationen!

Beim Vorwärtsarbeiten legt man sich folgende Frage vor:

Welche Teilziele kann man von den Startgrößen ausgehend erreichen, und auf welche Weise ist dies möglich?

Beim Rückwärtsarbeiten lautet die Frage:

Von welchen Teilzielen ließe sich die Zielgröße erreichen, und auf welche Weise wäre dies möglich?

Fragen nach Polya:

Vorwärtsarbeiten	Rückwärtsarbeiten
Was haben wir?	Was wollen wir?
Was sind die Daten?	Was ist die Unbekannte?
Wozu dienen solche Größen?	Wie bestimmt man eine Größe dieser Art?
Wie kann man solche Daten benutzen?	Wie ermittelt man eine solche Unbekannte?
Was kann man von solchen Daten ableiten?	Von was für Daten kann man eine solche Unbekannte ableiten?

Als weitere Möglichkeiten wären aufzuführen:

das kombinierte Vorgehen

das Modellieren (Übergang von der Ausgangsebene, auf der das Problem gestellt wurde, zu einer Modellebene)

das Verwenden heuristischer Hilfsmittel (wie z. B. Graphen, informative Figuren, umstrukt. Wissensspeicher u.a.)

B) Weitere Hilfen zur Ansatzfindung seien in Stichpunkten genannt:

1. Voraussicht (Aufstellen von Vermutungen)
2. Material sammeln und in zweckmäßige Verbindung zu der Aufg. bringen - Mobilisieren und Organisieren
3. Ergänzen und Umgruppieren
4. Isolieren und Kombinieren
5. Erkennen und Sich-Erinnern
6. Verwenden von verschiedenen Veranschaulichungsformen (Tabelle, Skizze, Modellversuch)
7. Umformulieren in vorteilhafte Texte

Auch diese Hilfen sollten den Schülern bewußt gemacht werden und im Verlaufe der Schulzeit an verschiedenen Aufgaben angewendet werden.

C) Weitere Aktivierungsmöglichkeiten

1. Man lasse den Schüler aktiv zur Formulierung der Aufg. beitragen!

Ausgehend von dem Grundsatz, die Schüler selbst so viel wie möglich entdecken zu lassen, sollte der Lehrer versuchen, bereits in der Formulierung der Aufgabenstellung die Schüler einzubeziehen. Sie werden sich dann der Aufgabe stärker annehmen und aktiver auch bei ihrer Lösung mithelfen.

<u>2. Man variiere die Anforderungsstruktur der Aufgaben!</u>

Die Variation der Anforderungsstruktur von Aufgaben ist auf verschiedene Weise möglich. Bereits durch die Wahl der Darstellungsform (rein verbal, mit Skizze, als Graph ...) lassen sich Varianten bilden, die insbesondere entsprechend geartete Denktypen ansprechen werden. Innerhalb jeder Darstellungsform sind Variationen denkbar, die sich durch die Veränderung des Verhältnisses von für die Aufgabenlösung wesentlichen und unwesentlichen Angaben ergeben.

Bei Textaufgaben entscheidet oftmals auch die Textgestaltung (z. B. Wo steht die Frage? Wie wird die Frage gestellt? Werden "Signalwörter" verwendet? Wie sind die Angaben im Text verteilt?), der Bekanntheitsgrad des Sachverhaltes, die Interessenlage der Schüler der entsprechenden Altersstufe u.a.m. über Erfolg oder Mißerfolg im Lösungsvollzug.

Als weitere Möglichkeiten die Anforderungsstruktur zu variieren seien genannt:

. die mathematische Struktur des zu bearbeitenden Problems (Formel, Gleichung ...),
. die Anzahl und die Verknüpfung der notwendigen mathematischen Operationen,
. die Anzahl und Stufung von erforderlichen Zwischenergebnissen,
. die Art der geistigen Anforderungen (auszuführende geistige Operationen, Kenntnisse ...)

<u>2. Zur Phase 4</u>

Die Unterrichtserfahrungen zeigen, daß oftmals der Phase der Rückbesinnung auf eine Aufgabe zu wenig Bedeutung beigemessen wird. Die Formulierung eines Antwortsatzes und die Durchführung der Probe am Text sind noch im Unterricht anzutreffen, doch die Möglichkeiten des Abhebens von Verfahrenskenntnissen, die bei der Lösung anderer Aufgaben

zum Tragen kommen könnten, werden verschenkt. Fragen nach dem Weg, der bei der gelösten Aufgabe zum Ziel führte, nach der Übertragbarkeit des Weges auf ähnliche Aufgaben, nach der Art der Aufgaben, auf die der Weg übertragen werden könnte, traten in hospitierten Stunden nicht auf. Ebenfalls zu kurz kommt eine Auswertung der Aufgabe oder des Ergebnisses der Aufgabe in erzieherischer Hinsicht (Erziehung im engeren Sinne). Wenngleich es natürlich nicht bei jeder Aufgabe sinnvoll ist, besteht jedoch eine berechtigte Forderung danach. Gerade eine vernünftige erzieherische Auswertung könnte die Schüler bei Aufgaben mit ähnlichen Sachverhaltsvorgaben motivieren und somit aktivieren.
Die nachfolgenden Beispiele sollen das Gesagte illustrieren:

<u>1. Beispiel: LB Kl. 7, S. 91/8</u>

<u>Aufgabentext</u>: Wasser soll aus einer Baugrube ausgepumpt werden. Es stehen 5 Pumpen (gleiche) zur Verfügung. Der Bauleiter meint: "Mit 5 Pumpen schaffen wir die Arbeit in 4 $\frac{1}{2}$ Stunden."
Wieviel Sunden dauert das Auspumpen länger, wenn nur 4 Pumpen eingesetzt werden können?

<u>Analyse der Aufgabe</u>: + <u>Analyse der Mittel:</u> Solche Typen von Aufgaben treten dem Schüler in Klasse 7 nicht erstmalig gegenüber. Ähnliche Aufgaben wurden bereits in Klasse 6 betrachtet. Der Schüler sollte also schon über entsprechende Verfahrenskenntnisse für solche Aufgabentypen verfügen und könnte die Analyse der Aufgabe selbständig ausführen. Im Ergebnis dieser Phase könnte etwa stehen:

1. Skizze: (Schluß auf 1)

5 Pumpen $4\frac{1}{2}$ Stunden $\longrightarrow$	1 Pumpe $5\cdot 4\frac{1}{2}$ Stunden	$\longrightarrow$ 4 Pumpen x Stunden

Ansatz: $x = \dfrac{5\cdot 4\frac{1}{2}\text{ Stunden}}{4}$

2. Tabelle:

Anzahl der Pumpen	Zeit in h
5	4,5
4	x

Überlegung - es liegt umgekehrte Proport. vor.

Ansatz: $\frac{5}{4} = \frac{x}{4,5}$

3. Anwendung physikalischer Kenntnisse:

Die Arbeit ist gleich dem Produkt aus Leistung und Zeit. Die Arbeit, die zu verrichten ist, bleibt gleich, ebenso die Leistung einer Pumpe, diese sei P.

Ansatz:
$$W_1 = W_2$$
$$5\cdot P\cdot 4,5\text{ h} = 4\cdot P\cdot x\text{ h}$$
$$x = \frac{5\cdot 4,5}{4}$$

Bei allen diesen Ansätzen wird zunächst auf die gesamte Zeit, die die 4 Pumpen benötigen, orientiert. Erst anschließend wird die "Mehr" - zeit berechnet. Dieses Vorgehen wäre beim Durchdringen der Aufgabe als erste Teilaufgabe auszugliedern.

2. Beispiel: LB Kl. 8, S. 83/7

Aufgabentext: Jürgen läßt einen Drachen steigen, so hoch es der 87 m lange Bindfaden zuläßt. Michael sieht den Drachen senkrecht über sich. Welche Höhe hat der Drachen erreicht, wenn Michael von

Jürgen 60 Schritte von je 80 cm Länge entfernt steht? (Der Durchhang der Drachenschnur wird vernachlässigt.)

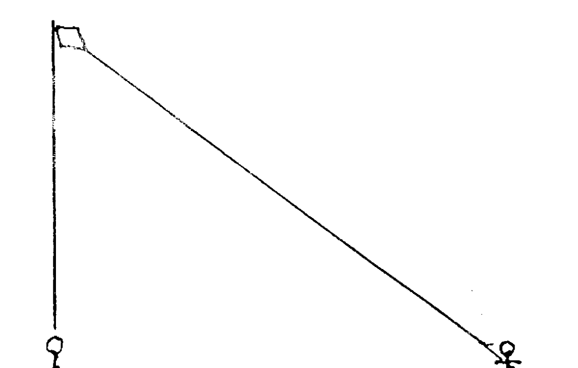
Vorüber-legungen:

Diese Aufgabe sollte den Schülern nicht als fertige Lehrbuchaufgabe "vorgesetzt" werden. Eine kleine den Sachverhalt erläuternde Erzählung - "Zwei Jungen lassen einen Drachen steigen; der jüngere fragt nach der erreichten Höhe des Drachen, als die Schnur völlig abgerollt ist; kann der ältere Junge (8. Kl.) das ermitteln? Wie? Was brauchte er dazu? Was könnte er leicht ermitteln? ..." - weckt das Interesse der Schüler stärker, außerdem würden die Ausgangsdaten, die bestimmbar sind, explizit abfallen.

Analyse der Aufgabe + Analyse der Mittel

Bei dieser Aufgabe bietet sich eine Skizze an, um den Sachverhalt zu veranschaulichen.
Die Diskussion der zu bestimmenden Größen unpliziert gleichzeitig die Lösungsidee (Mittel zur Berechnung - Satz des Pythagoras)!

Skizze:



Ansatz:

$$l^2 = h^2 + s^2$$

$$h = l^2 - s^2$$

Methodisch sollte auch bei dieser Aufgabe die selbständige Schülertätigkeit dominieren.
Bereits nach der Erläuterung des Sachverhalts (Problems) sollten die Schüler Zeit zum Nachdenken erhalten, um die Skizze und die bestimmbaren Größen zu überlegen.
Nach einer kurzen Zwischenkontrolle wird auch die numerische Lösung von den Schülern selbständig ausgeführt.

<u>3. Beispiel: LB Kl. 9, S. 103/15</u>

<u>Aufgabentext</u>: Bei einem Manöver wird ein gegnerischer Aufklärer um 7.40 Uhr über dem Ort T gesichtet, er bewegt sich mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 1000 km h^{-1} in Richtung Z.
7.42 Uhr starten in Z zwei Jagdflugzeuge und fliegen mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 2400 km h^{-1} dem Aufklärer entgegen.
Wieviel Minuten nach dem Start treffen die Jagdflugzeuge den Aufklärer, wenn die Entfernung von T nach Z 420 km beträgt?

<u>Analyse der Aufgabe</u>: Der Grad der Selbständigkeit der Schüler bei der Bearbeitung der Aufgabe sollte möglichst hoch sein, entsprechende Verfahrenskenntnisse sind vorhanden. Die Schüler lesen den Text durch, geben den Sachverhalt mit eigenen Worten wieder, entnehmen dem Aufgabentext die Ausgangsdaten und das zu erreichende Ziel.
Sie wählen eine zweckmäßige Veranschaulichung und diskutieren den physikalischen Sachverhalt.

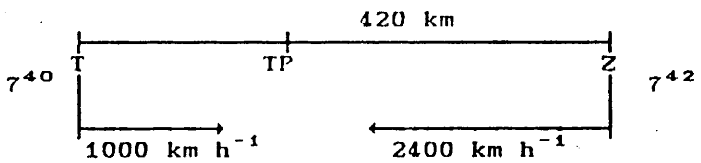
Mögliche Veranschaulichungen:

1. Text: geg.:

1. T und Z sind 420 km entfernt. — $s = 420$ km
2. Auflärer wird über T 7.40 gesichtet.
3. Jagdflugzeuge fliegen 7.42 in Z ab. — $t_A = t_y + 2\text{min}$
4. Geschwindigkeit des Aufklärers 1000 km h^{-1} — $v_A = 1000 \frac{km}{h}$
5. Geschwindigkeit der Jagdflugzeuge 2400 km h^{-1} — $v_y = 2400 \frac{km}{h}$

ges.: Wann treffen sie sich?

2. Skizze:



3. Tabelle:

	Weg in km	Zeit in h	v in $\frac{km}{h}$
Aufkl.	x	y	1000
Jagdfl.	420-x	$y - \frac{2}{60}$	2400

Die Analyse endet mit der Feststellung, daß es sich um eine gleichförmige Bewegung handelt, also die Gleichung $v = \frac{s}{t}$ Anwendung findet.

Analyse der Mittel

Schüler stellen ausgehend von der Überlegung, daß es sich um zwei sich bewegende Objekte handelt, für die jeweiligen Objekte die Gleichungen auf.

$$v_A = \frac{s_A}{t_A} \qquad\qquad v_y = \frac{s_y}{t_y}$$

$$1000 = \frac{x}{y} \qquad\qquad 2400 = \frac{420-x}{y-\frac{1}{30}}$$

Es entsteht ein Gleichungssystem, das von den Schülern nach bekannten Lösungsverfahren gelöst werden kann.

Diese Beispiele mögen genügen, um deutlich zu machen, wie der Aufgabenlösungsprozeß gestaltet werden sollte, um die Schüler möglichst stark geistig aktiv tätig werden zu lassen.
Entscheidend für den Erfolg, d. h. für positive Veränderungen in der Schülerpraxis ist, die Lehrer zu veranlassen, in diesem Sinne zu arbeiten. Wir haben deshalb seit einem Jahr eine Zusammenarbeit mit interessierten Mathematiklehrern des Territoriums (Stadt Erfurt) ins Leben gerufen. Neben theoretischen Diskussionen haben wir konkrete Unterrichtssituationen durchgesprochen. Für das kommende Schuljahr ist nun die Umsetzung im Mathematikunterricht geplant. Über entsprechende Erfahrungen wird danach zu berichten sein.

TARTALOMJEGYZÉK

Oldal